内容简介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧丛书”之一，是学习泛函分析课程的一本很好的辅导书．本书编写顺序与一般的泛函分析教材同步，内容包括度量空间、线性有界算子、希尔伯特空间的几何学三大部分．本书在凝练知识、释疑解难的基础上，用大量、全面的例题对度量空间、赋范线性空间、线性算子与线性泛函、内积空间与各种算子及它们的谱分解的概念、关系、性质进行了演绎、推导与论证，将极大地有益于读者掌握泛函分析知识与方法．

希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书．

前　言

泛函分析是高等学校数学专业本科与研究生的一门主要课程，是现代数学中一个较新的重要分支．泛函分析起源于经典数学、物理中的一些变分问题和边值问题，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题与成果，综合运用了分析的、代数的和几何的观点和方法．泛函分析的概念和方法对现代纯数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，都已产生或正在产生重大的影响．

泛函分析分为线性泛函分析与非线性泛函分析两大部分，本书主要讨论线性泛函分析．本书编写顺序与大多数泛函分析教材同步，主要内容为度量(距离)空间、线性有界算子与希尔伯特空间的几何学．与本丛书其它书籍一样，本书按章节编写，每节分为主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析三个部分，对问题逐个地进行讨论、分析、证明、演算与归纳，用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧和举证方法，使读者通过本书能更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法．由于泛函分析的概念比较抽象难懂，涉及的知识比较广泛而深刻，读者学习起来比较困难，因此本书尽可能做到由浅入深、循序渐进，用较浅显的语言、较详尽的方式阐述问题，希望读者通过学习有较大的收获．

本书在编写过程中参阅了一些作者的有关著作，同时得到了华中科技大学出版社的大力支持与帮助，在此向他们表示诚挚的谢意．

由于经验不足与学识所限，本书难免会有疏漏之处，欢迎批评指正．

孙清华

2005 年 2 月

目　　录

第一章　度量空间

度量空间又称距离空间，本章主要研究度量空间及空间中点集的性质，并引入压缩映射原理.

第一节　度量空间的基本概念

主要内容

1. 定义1　设X是一个非空集合，x和y是X中任意两个元素，若按某种法则，总有一个实数$\rho(x,y)$与之对应，且满足

(1)非负性　$\rho(x,y)\geqslant 0$ 又 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$，

(2)对称性　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

(3)三角不等式　$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$，$z\in X$，

则称$\rho(x,y)$是两点x,y间的**距离(度量)**，称X为**度量空间**(或**距离空间**). 也记做(X,ρ).

2. 定义2　设X是一个度量空间，x_n $(n=1,2,\cdots)$，$x\in X$，如果当$n\to\infty$时，数列$\rho(x_n,x)\to 0$，则称点列$\{x_n\}$按照距离$\rho(x,y)$收敛于x，记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 称$\{x_n\}$为**收敛点列**，称$x$为$\{x_n\}$的**极限**.

定理1　在度量空间中，任何一个点列至多只有一个极限，即收敛点列的极限是惟一的.

定理2　若$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$，即距离$\rho(x,y)$是两个变元$x,y$的连续函数.

定义3　设M是度量空间X中的点集，如果存在$x_0\in X$，使得$\sup\limits_{x\in M}\rho(x,x_0)<\infty$，则称$M$是$X$中的**有界集**.

定理3 设$\{x_n\}$是度量空间X中的收敛点列，则集合$\{x_n\}$是有界的．

3. **定理4** 度量空间R的任一非空子集M也是度量空间，称M为R的子空间.

疑难解析

如何理解度量空间概念?

答 度量空间是引入了度量函数$\rho(x,y)$的一个非空集合. 在一个非空集合X中，可以定义不同的度量函数$\rho(x,y)$和$\rho_1(x,y)$，从而得到不同的度量空间.

设(X,ρ)与(X_1,ρ_1)是两个度量空间，若存在从X到X_1的一一对应φ，使得对于每个$x,y\in X$，有$\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y)$成立，则称$\varphi$是$(X,\rho)$到$(X_1,\rho_1)$上的**等距映射**，而称这两个空间是**等距同构**的. 两个度量空间，从形式上看，集合中的元素可以完全不同，但是如果它们是等距同构的，则可以将其中较为抽象的空间用另一个较为具体的空间来表示，从而在论证时可以在技巧上获得较大的便利.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉度量空间的基本概念，能验证集合按规定的距离构成度量空间. 关键是三个条件，特别是三角不等式是否成立.

例1 在$\mathbf{R}^n$上，

(1)$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，　　(2)$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，

(3)$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{1/2}$，

证明：$\mathbf{R}^n$是度量空间.

证 (1)、(2)显然成立，下证(3)成立. 利用柯西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$

得 $$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$=\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{1/2}\Big]^2.$$
于是，在 $\mathbf{R}^n$ 中任取 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$，$b_k=\zeta_k-\eta_k$，则有
$$\Big[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\Big]^{1/2}\leqslant\Big[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2\Big]^{1/2},$$
即 $$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$
因此，$\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

若令
$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|,\quad \rho_2(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|,$$
则可以验证 $\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho_1(x,y)$ 与 $\rho_2(x,y)$ 也分别构成度量空间.

若在 $\mathbf{R}^n$ 中，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的坐标是复数，按度量 $\rho(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\Big)^{1/2}$ 构成的度量空间是酉空间，记做 C^n.

例 2 设 X 是任意的非空集合，对 X 中的任意 x,y，令
$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq y,\\ 0, & \text{当 } x=y,\end{cases}$$
证明：X 是度量空间.

证 $\rho(x,y)$ 满足非负性与对称性是显然的.

当 $\rho(x,y)=0$ 时，$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 成立.

当 $\rho(x,y)=1$ 时，对任何 $z\in X$，式 $x\neq z$ 与 $y\neq z$ 中至少有一个成立，从而 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 成立，所以三角不等式成立.

综上知，X 是度量空间（称为**离散度量空间**）.

例 3 设 $\mathbf{R}^1$ 是实数全体，规定对 $x,y\in\mathbf{R}^1$，令 $\rho(x,y)=$

$\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$，证明：$\mathbf{R}^1$ 关于 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

证 满足非负性与对称性是显然的.要证明三角不等式成立，只需证明：对任意的实数 a,b，以下不等式成立：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

由于在 $(0,+\infty)$ 上定义的函数 $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 是单调增加函数，又由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，可以得出

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$
$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

所以 $$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|(x-z)+(z-y)|}$$
$$\leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

成立，从而知 $\mathbf{R}^1$ 按 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

例4 设 S 为实数列 $\{x_n\}$ 的全体（或复数列全体）所成的空间，称 x_i 为 $x=\{x_i\}$ 的第 i 个坐标，对于 $x,y\in S$，$x=\{x_i\}$，$y=\{y_i\}$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|},$$

证明：(1) $\rho(x,y)$ 是 S 上的一个度量；

(2) 在 S 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛.

证 (1) ρ 满足非负性与对称性是显然的.

类似于例3，可得三角不等式

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

所以 ρ 是 S 上的一个度量.

(2)设点列

$$x^{(n)}=\{x_i^{(n)}\}\in S,\ n=1,2,\cdots,$$

又 $x=\{x_i\}\in S$,则 $\rho(x^{(n)},x)\to 0\ (n\to\infty)$的充要条件是,对于每个自然数 i,有$\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$.

因为,若

$$\rho(x^{(n)},x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty),$$

则对于每个 i,有

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty),$$

从而

$$|x_i^{(n)}-x_i|\to 0\ (n\to\infty).$$

反之,设 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty)$, $i=1,2,\cdots$,即$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ m\in\mathbf{N}$,使得$\sum\limits_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$. 又对于$i=1,2,\cdots,m-1,\exists\ N_i\in\mathbf{N}$,使得当$n>N_i$ 时,有$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_{m-1}\}$,则当$n>N$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而,当 $n>N$ 时,有

$$\rho(x^{(n)},x)=\Big(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\Big)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon,$$

即

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0\ (n\to\infty).$$

例 5 设 X 是非空集,对任何自然数 k,有 $X\times X$ 上函数 ρ_k,满足

(1)对任何 $x,y\in X$, $\rho_k(x,y)\geqslant 0$, $\rho_k(x,x)=0$;

(2)$\rho_k(x,y)\leqslant\rho_k(x,z)+\rho_k(y,z)$, $x,y,z\in X$.

又设对一切自然数k,均有$\rho_k(x,y)=0$ 时,必有$x=y$. 证明:X 按照

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}$$

成为度量空间,且对$\{x_n\}\subset X$,$\{x_n\}$按距离 ρ 收敛于 x 的充要条件

是对一切自然数k,均有$\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$.

证 $\rho(x,y)\geqslant 0$是显然的. 若$\rho(x,y)=0$,则对于一切k, $\rho_k(x,y)=0$,从而$x=y$.

对于任何k和任何x,y,有

$$\rho_k(x,y)\leqslant\rho_k(x,x)+\rho_k(y,x)=\rho_k(y,x)$$

和
$$\rho_k(y,x)\leqslant\rho_k(y,y)+\rho_k(x,y)=\rho_k(x,y),$$

所以
$$\rho_k(x,y)=\rho_k(y,x)\Longrightarrow\rho(x,y)=\rho(y,x).$$

对$x,y,z\in X$,有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left[\frac{\rho_k(x,z)}{1+\rho_k(x,z)}+\frac{\rho_k(z,y)}{1+\rho_k(z,y)}\right]\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

从而知X是一度量空间.

下证充要条件成立.

设对于一切$k\in\mathbf{N}$, $\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$, $\forall\ \varepsilon>0$,取K,使得 $\sum\limits_{k=K}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$,再取$N\in\mathbf{N}$,使得当$n>N$时,有

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x_n,x)}{1+\rho_k(x_n,x)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而知,当$n>N$时,有$\rho(x_n,x)<\varepsilon$,即$\rho(x_n,x)\to 0$.

反之,由$\rho(x_n,x)\to 0$,易知

$$\frac{\rho_k(x_n,x)}{1+\rho_k(x_n,x)}\leqslant 2^k\rho(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty),$$

从而有
$$\rho_k(x_n,x)\to 0\quad(n\to\infty).$$

即$\{x_n\}$按距离ρ收敛于x的充要条件是,对于一切自然数k,均有$\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$.

例6 取所有有界复数列作为元素组成集合X,对每个元素$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$(简记做$x=(\xi_j)$),都存在一个实数$C$,使得

$|\xi_j|<C\ (j=1,2,\cdots)$. 按 $\rho(x,y)=\sup\limits_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|$ 定义度量，令 $l^\infty=(X,\rho)$，证明：l^∞ 是度量空间.

证 由题设知，$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$ 都是有界的复数列，所以 $|\xi_j-\eta_j|(j=1,2,\cdots)$ 有界，且存在上确界，即 $\rho(x,y)=\sup\limits_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|$ 是有限的非负实数.

$x=y\Rightarrow\rho(x,y)=0$ 是明显的. 反之，若

$$\rho(x,y)=\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|=0,$$

则对每一 j，有

$$0\leqslant|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|=0,$$

从而

$$\xi_j=\eta_j(j=1,2,\cdots)\Rightarrow x=y.$$

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 显然成立.

对任意 $z=(\zeta_j)\in X$，有

$$\begin{aligned}|\xi_j-\eta_j|&=|(\xi_j-\zeta_j)+(\zeta_j-\eta_j)|\leqslant|\xi_j-\zeta_j|+|\zeta_j-\eta_j|\\&\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\zeta_j|+\sup_{j\in\mathbf{N}}|\zeta_j-\eta_j|,\quad j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

依上确界的定义，由上式有

$$\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\zeta_j|+\sup_{j\in\mathbf{N}}|\zeta_j-\eta_j|,$$

即

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

所以 l^∞ 是度量空间.

例7 设 E 是勒贝格可测集，$m(E)<\infty$. 设 S 是 E 上实值（或复值）可测函数全体，当 $f(t)$，$g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时，把 f 和 g 看做 S 中的同一点，且对于 $f,g\in S$，定义

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}t,$$

证明：(1) $\rho(x,y)$ 是 S 上的一个度量；

(2) 在 S 中，$\rho(f_n,f)\to0$ 的充要条件是 f_n 依测度收敛于 f.

证 (1) 因为 $f(t)$，$g(t)$ 是可测函数，当 $f(t)$，$g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时，可以把 f、g 看做 S 中的同一点，所以 $\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$ 是有界可测函数. 因为 $m(E)<\infty$，所以 $\rho(f,g)$ 有

确定的意义，仿照例6可以证明，$\rho(f,g)$满足度量的三个条件.

(2)设f_n依测度收敛于f，则对于任何$\sigma>0$，有

$$E\left(\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}>\sigma\right)\subset E(|f_n-f|>\sigma),$$

所以 $$m\left(E\left(\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}>\sigma\right)\right)\leqslant m(E(|f_n-f|>\sigma))\to 0,$$

即$\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}$依测度收敛于零，因为$\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\leqslant 1$和$m(E)<\infty$，则由实变函数中有界控制收敛定理知，$\rho(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$.

反之，若$\rho(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$，则当$\sigma>0$时，有

$$\rho(f_n,f)\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}m\quad(E(|f_n-f|\geqslant\sigma)).$$

令$n\to\infty$，即知$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f.

例8 判断在所有实数组成的集合上，下列$\rho(x,y)$是否为度量：

(1)$\rho(x,y)=(x-y)^2$； (2)$\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$.

解 (1)不是度量. 不满足三角不等式，如$x=1,z=0,y=-1$时，有

$$\rho(1,-1)>\rho(1,0)+\rho(0,-1).$$

(2)是度量. 非负性与对称性显然满足，而

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{1/2}+|z-y|^{1/2})^2,$$

所以 $$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

例9 设ρ是X上的度量，x,y,z,t是X中任意四点，证明：

$$|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).$$

证 由三角不等式可得

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,t)+\rho(t,z),$$

故 $$\rho(x,z)-\rho(y,t)\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).\qquad ①$$

在上式中，互换x与y，z与t可得

$$\rho(y,t)-\rho(x,z)\leqslant\rho(y,x)+\rho(t,z). \qquad ②$$

综合式①、式②即得

$$|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).$$

例 10 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续实值函数，对 $x,y\in\mathbf{R}$，记 $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$. 证明：ρ 是 $\mathbf{R}$ 上度量的充要条件是 f 为严格单调函数.

证 设 f 是严格单调函数，直接验证可知，$\rho(x,y)$ 满足非负性、对称性与三角不等式，所以 ρ 是 $\mathbf{R}$ 上的度量.

反之，设 $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ 是 $\mathbf{R}$ 上的度量，则由 $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$ 知，当 $x\neq y$ 时，$f(x)\neq f(y)$.

现用反证法证：当 $x<y<z$ 时，有 $f(x)<f(y)<f(z)$ 或 $f(x)>f(y)>f(z)$. 设当 $x<y<z$ 时，有 $f(x)>f(y)$，$f(z)>f(y)$. 又设 $f(z)>f(x)$，则在 $[y,z]$ 上考察连续函数 f 可知，由所设 $f(z)>f(x)>f(y)$，依中值定理知，必存在 $t\in[y,z]$，使得 $f(t)=f(x)$. 而 $t>y>x$，所以不可能有 $x=t$，与定义 1 中的条件 1 矛盾. 对于 $x>y>z$ 时有 $f(x)<f(y)$，$f(z)<f(y)$ 情形，类似可知结论不成立.

综上知，ρ 是 $\mathbf{R}$ 上度量的充要条件是，f 为严格单调函数.

例 11 设 X 是一度量空间，其度量为 $\rho(x,y)$，$x,y\in X$，证明：

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

是 X 上另一度量空间，并 $\tilde{\rho}$ 是有界的.

证 $\tilde{\rho}(x,y)$ 满足非负性与对称性是明显的. 因为 $\rho(x,y)$ 是 X 上的度量，所以对 $x,y,z\in X$，有

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\leqslant\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}$$
$$=\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y),$$

所以 $\tilde{\rho}$ 是 X 上的又一度量空间.

由 $\tilde{\rho}(x,y)<1$ 知，$(X,\tilde{\rho})$ 是有界的.

例 12 设 $f:[0,+\infty)\to[0,\infty)$ 是严格增加函数，且满足

$$f(0)=0,\quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\quad x,y\in[0,\infty).$$

设 ρ 是 X 上的度量，证明：

$$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$$

也是 X 上的度量.

证 因为 f 的值域为 $[0,\infty)$，故 ρ_1 是非负的，且当 $\rho_1(x,y)=0$ 时，有 $f(\rho(x,y))=0$. 由 $f(0)=0$ 及 f 的严格单调性，知

$$\rho(x,y)=0\Longrightarrow x=y.$$

又 $\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))=f(\rho(y,x))=\rho_1(y,x)$,

$$\begin{aligned}\rho_1(x,z)&=f(\rho(x,z))\leqslant f(\rho(x,y)+\rho(y,z))\\&\leqslant f(\rho(x,y))+f(\rho(y,z))\\&=\rho_1(x,z)+\rho_1(y,z),\end{aligned}$$

所以 $\rho_1(x,y)$ 也是 X 上的度量.

例 13 设 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上连续函数的全体，$\forall\ x,y\in C[a,b]$，定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

证明：$C[a,b]$ 按照 ρ 是度量空间.

证 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 是显然的，且 $x(t)=y(t)$，$t\in[a,b]$ 时，$\rho(x,y)=0$. 反之，若 $x,y\in C[a,b]$，$\rho(x,y)=0$，则

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=0,$$

从而 $$|x(t)-y(t)|=0,\quad t\in[a,b],$$

即 $$x(t)=y(t)\Longrightarrow x=y.$$

由定义即知 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

对 $[a,b]$ 上三个连续函数 x,y,z，有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

所以 $C[a,b]$ 按照 ρ 是度量空间.

第二节　度量空间中的点集与映射

主要内容

1. 定义1　设(X,ρ)是一度量空间,$x_0\in X$,实数$r>0$,则称点集

$$B(x_0;r)=\{x|x\in X\text{ 且 }\rho(x,x_0)<r\} \quad ①$$

为以x_0为中心、r为半径的**开球**. 称点集

$$\widetilde{B}(x_0;r)=\{x|x\in X\text{ 且 }\rho(x,x_0)\leqslant r\} \quad ②$$

为以x_0为中心、r为半径的**闭球**. 称点集

$$S(x_0;r)=\{x|x\in X\text{ 且 }\rho(x,x_0)=r\}$$

为以x_0为中心、r为半径的**球面**,且

$$S(x_0;r)=\widetilde{B}(x_0;r)-B(x_0;r).$$

2. 定义2　设集$A\subset X$,X是度量空间. 对$x_0\in A$,若存在$\varepsilon>0$,使得$\{x|\rho(x,x_0)<\varepsilon\}\subset A$,则称$x_0$是$A$的**内点**.

若A中每一点都是内点,则称A是X的开集(规定$\varnothing$是开集).

3. 定义3　设X是度量空间,$x_0\in X$,则称X中包含x_0的任何开集G为x_0的一个**邻域**.

4. 定理1　设X是度量空间,则

(1)空集与全空间是开集(即$\varnothing$与X是开集);

(2)任意个开集的并集是开集;

(3)有限个开集的交集是开集.

5. 定义4　设X是度量空间,A是X中的点集. 对于$x_0\in X$,若x_0的每个ε邻域中都含有A中无限多个点,则称x_0是A的**聚点**(**或极限点**).

下列命题等价:

(1)x_0是A的聚点;

(2)x_0的任一邻域内必含有A中异于x_0的点;

(3)在 A 中存在点列 $\{x_n\}$，有 $x_n \neq x_0$，且 $x_n \to x_0$.

6. 定义5 设 A 是度量空间 X 中的点集，称 A 的聚点全体构成的集合为 A 的**导集**，记做 A'. 若 $A' \subset A$，则称 A 为**闭集**. $\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**.

下列命题等价：

(1)A 是闭集； (2)A 中任何收敛点列 $\{x_n\}$ 必收敛于 A 中点；

(3)A^{C}* 是开集；(4)$A = \overline{A}$.

在任意的度量空间中，空集及全空间是闭集，任意个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并集是闭集.

7. 定义6 设 X 与 Y 是度量空间，f 是 $A \subset X$ 到 Y 的映射，若 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，使得满足 $\rho(x, x_0) < \delta$ 的一切 $x \in A$，$\widetilde{\rho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ 恒成立，则称映射 f 关于 x_0 是**连续**的. 若 f 关于 A 的每个点都连续，则称 f 是 A 上的**连续映射**.

定义6也可叙述为：若对 $f(x_0)$ 的任何邻域 $N(f(x_0))$，必有 x_0 的一个邻域 $N(x_0)$，使得当 $x \in N(x_0) \cap A$ 时，$f(x) \in N(f(x_0))$，则称 f 在 x_0 是**连续**的. 若 f 关于 A 的每个点都连续，则称 f 是 A 上的**连续映射**.

以下命题等价：

(1)映射 f 在 x_0 连续；

(2)对于 $f(x_0)$ 的任何 ε 邻域 $N(f(x_0), \varepsilon)$，必有 x_0 的 δ 邻域 $N(x_0, \delta)$，使得当 $x \in N(x_0, \delta) \cap A$ 时，$f(x) \in N(f(x_0), \varepsilon)$；

(3)对于 A 中任意一列收敛于 x_0 的点 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ 成立.

8. 定理2 度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 f 在 X 上是连续的充要条件是，Y 的任何开子集的原像是 X 的开子集.

推论 度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 f 在 X 上连续的充要条件是，Y 的任一闭子集的原像是 X 的闭子集.

---

* 国标规定 A 的补集用 $\complement A$ 表示，为了与大多数教材呼应，本书仍用 A^C 表示.

9. 定义7 当一个映射 f 把定义域 $\mathscr{D}(f)$ 中的每个开集映为值域 $\mathscr{R}(f)$ 中的开集时，称 f 是**开映射**.

设 X,Y 是两个度量空间，T 是 $\mathscr{D}(T)$ $(\subset X)$ 到 Y 中的算子，如果

$$G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathscr{D}(T)\}$$

是乘积距离空间 $(X\times Y,\rho)$ 中的闭集，则称 T 是**闭算子或闭映射**.

定理3 定义域是闭集的连续映射必是闭映射.

疑 难 解 析

度量空间中的连续映射与数学分析中的连续函数有什么联系？

答 可以认为，度量空间中的连续映射是数学分析中连续函数概念的推广. 在数学分析中函数 f 的连续性是这样定义的：若 f 定义在 $[a,b]$ 上，$x_0\in[a,b]$，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 f 在点 x_0 连续. 若对每个 $x\in[a,b]$ f 都连续，则称 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

对两个度量空间 X 和 Y，映射 $f:X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续，是指 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得对满足 $\rho(x,x_0)<\delta$ 的一切 x，恒有 $\tilde{\rho}(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ 成立. 如果 f 关于 X 的每个 x 都连续，则称 f 是连续映射.

可见，这两个概念是密切相关的，其中后一概念是包含前一概念的.

方法、技巧与典型例题分析

度量空间中的点集与映射是 $\mathbf{R}^n$ 中点集概念与数学分析中集合与函数概念的拓广，要求认识它们之间的联系与叙述上的区别.

例1 证明：在度量空间中，(1)任意开球是开集；(2)任意闭球是闭集.

证 (1)设任取 $x\in B(x_0;r)$，则 $\rho(x,x_0)=a<r$，故 $B\left(x;\dfrac{r-a}{2}\right)\subset B(x_0;r)$，即为开集.

(2)任取 $y\in\widetilde{B}(x_0;r)$，则 $\rho(x,x_0)=a>r$，所以 $B\left(y;\frac{a-r}{2}\right)\subset B(x_0;r)^C$. 即 $\widetilde{B}(x_0;r)^C$ 是开集，故 $\widetilde{B}(x_0;r)$是闭集.

例2 设A和B是距离空间X中互不相交的两个闭集，证明：X中存在互不相交的两个开集U和V，使得$A\subset U$，$B\subset V$.

证 由题设$A\cap B=\varnothing$，知$A\subset X\setminus B$，而$X\setminus B$是开集，故对$x\in A$，$\exists\ \delta_x>0$，使$N(x,\delta_x)\subset X\setminus B$. 取$U=\bigcup\limits_{x\in A}N(x,\delta_x/2)$，则$U$是一族开集的并，仍为开集，且有$A\subset U$.

类似地，对 $y\in B$，$\exists\ \delta_y>0$，使 $N(y,\delta_y)\subset X\setminus A$. 取$V=\bigcup\limits_{y\in B}N(y,\delta_y/2)$，则$V$是开集，且有$B\subset V$.

下面用反证法证$U\cap V=\varnothing$. 设$z\in U\cap V$，由题设知，$\exists\ x\in A$，$y\in B$，使得$z\in N(x,\delta_x/2)\cap N(y,\delta_y/2)$，从而

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)<\frac{\delta_x}{2}+\frac{\delta_y}{2}\leqslant\max(\delta_x,\delta_y),$$

于是当$\rho(x,y)<\delta_x$时，$y\in X\setminus B$是不可能的. 同样，当$\rho(x,y)<\delta_y$时，$x\in X\setminus A$也是不可能的. 所以，必有$U\cap V=\varnothing$.

例3 证明：任意非空集$A\subset(X,\rho)$是开的$\Longleftrightarrow A$为开球的并.

证 若A是开球B_a的并，即$A=\bigcup\limits_{a\in A}B_a$，则对每个$a\in A$，存在开球$B_a$，使得$x\in B_a=\{z\mid\rho(x_a,z)<r_a\}$. 于是$\rho(x_a,a)=\varepsilon<r_a$，取$\eta=\frac{1}{2}(r_a-\varepsilon)$，$B(a;\eta)\subset B_a\subset A$，从而，$A$是开集.

反之，若A是开集，则对于每个$a\in A$，存在开球$B(a;r)\subset A$，从而，A可表示为这些开球之并，即$A=\bigcup\limits_{a\in A}B(a;r)$.

例4 证明：度量空间X中的点集F，对于$\varepsilon>0$，定义$\rho(x,F)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in F\}$，则

(1)$\{x\mid\rho(x,F)<\varepsilon\}$是$X$中的开集；

(2)$\{x\mid\rho(x,F)\leqslant\varepsilon\}$是$X$中的闭集.

证 对于函数$f:X\to[0,\infty)$，$f(x)=\rho(x,F)$，f是连续的，因为对于任何x,z，有

$$\rho(x,F)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in F\}\leqslant\inf\{\rho(x,z)+\rho(z,y)\mid y\in F\}$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,F).$$

类似地，有 $$\rho(z,F)\leqslant\rho(z,x)+\rho(x,F),$$

从而 $$|f(x)-f(z)|<\rho(x,z).$$

知 f 是连续映射，因此由连续映射的定理知

$$\{x\mid\rho(x,F)<\varepsilon\}=f^{-1}((-\infty,\varepsilon))$$

是开集；

$$\{x\mid\rho(x,F)\leqslant\varepsilon\}=f^{-1}([0,\varepsilon])$$

是闭集.

例 5 证明：度量空间中的任一闭集必为可列个开集的交，任一开集必为可列个闭集的并.

证 设 F 是度量空间中的闭集，则 $F=\{x\mid\rho(x,F)=0\}$，显然

$$\{x\mid\rho(x,F)=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid\rho(x,F)<\frac{1}{n}\right\}.$$

因此由例 4 结论可知，F 是一列开集的交.

设 G 是开集，则 G^C 是闭集，可以表为一列开集之交，即 $G^C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，从而

$$G=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)^C=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^C,$$

即 G 是一列闭集的并.

例 6 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数全体，对于 $x,y\in C[a,b]$，定义 $\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$，则 $C[a,b]$ 按 ρ 成为度量空间. 设 $A=\{x\mid x\in C[a,b]$，且 $t\in B$ 时，$|x(t)|<\alpha\}$，其中 B 是 $[a,b]$ 的子集，α 是正常数. 证明：A 为开集 $\Longleftrightarrow B$ 为闭集.

证 充分性 设 B 为闭集，则对 $x\in A$，有 $\max\limits_{t\in B}|x(t)|<\alpha$. 记 $\delta=\alpha-\max\limits_{t\in B}|x(t)|$，当 $y\in N(x,\delta)$（x 的 δ 邻域）时，有

$$\max_{t\in B}|y(t)|\leqslant\max_{t\in B}|x(t)|+\max_{t\in B}|x(t)-y(t)|$$
$$<\max_{t\in B}|x(t)|+\delta=\alpha.$$

所以 $y\in A$，即 $N(x,\delta)\subset A$，证得 A 是开集.

必要性　用反证法证. 设 A 为开集，而 B 不是闭集，则存在一点列 $\{t_n\}\subset B$，而 $t_n\to t_0\overline{\in}B$. 不妨设 $a<t_0<b$（其它情形可类似讨论）. 作 $x\in C[a,b]$ 如图 1.1，可以看出，$x\in A$，但对任何 $\delta>0$，当 $\delta>\delta_1>0$ 时，$x(t_0)+\delta_1=\alpha+\delta_1>\alpha$. 所以，当 n 充分大时，$x(t_n)+\delta_1>\alpha$. 从而 $x+\delta_1\overline{\in}A$. 说明了邻域 $N(x_0,\delta)\not\subset A$，与 A 是开集矛盾.

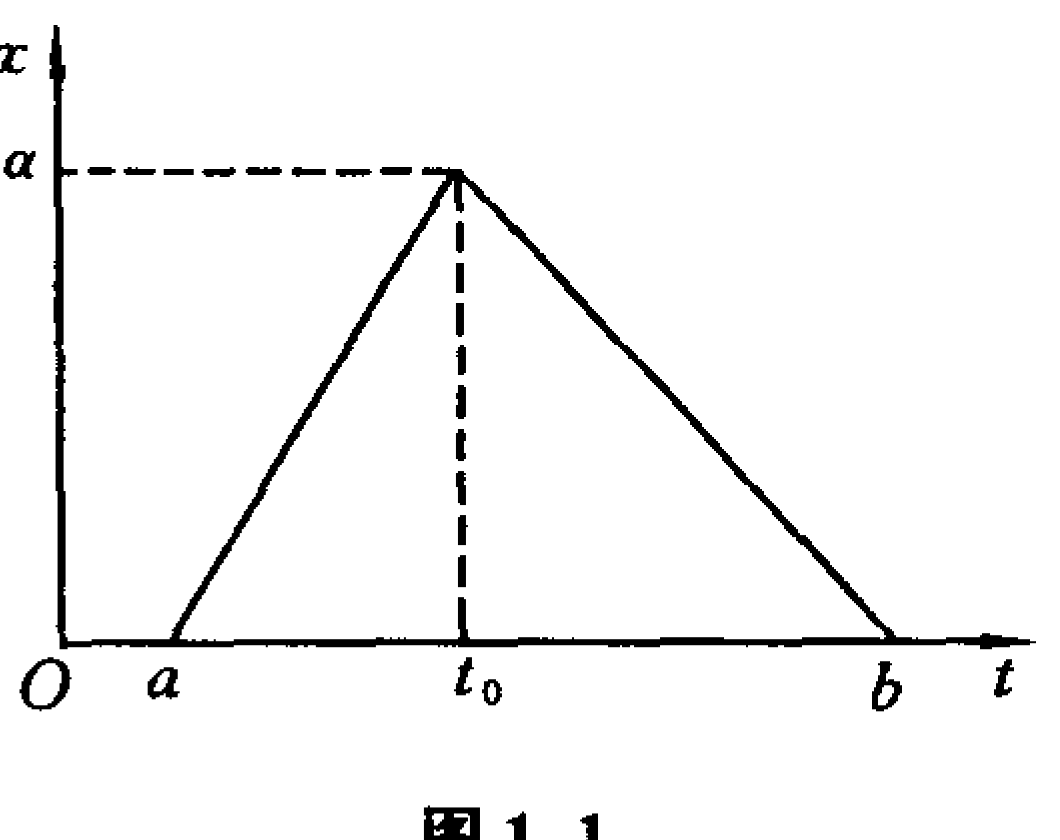


图 1.1

例7　证明：在离散度量空间 X 中的每个子集既是开集又是闭集.

证　设 A 是 X 的任意子集，对于任意 $a\in A$，开球 $B(a;1/2)=\{a\}\subset A$，所以 A 是开集. 类似可证 A^C 也是开集，所以 A 又是闭集.

下面利用连续映射定义及等价命题与充要条件来讨论定义在某些集合上的函数是连续函数的充要条件.

例8　证明：映射 $f: X\to Y$ 是连续的 $\Leftrightarrow$ 任意闭集 $M\subset Y$ 的原像是 X 中的闭集.

证　设 f 是连续的，A 是任意闭子集 M 的原像，则 M^C 的原像是 A^C，由主要内容 8 知，A^C 是开集，所以 A 是闭的.

反之，若 M 的原像 A 是闭的，则 M^C 与 A^C 均是开的，故由主要内容 8 知，f 是连续的.

但是，在连续映射下，开集的像不一定是开集. 例如，由 $x(t)=\sin t$ 定义的连续映射 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，将开集 $(0,2\pi)$ 映到闭集 $[-1,1]$ 上.

例9　设 X 是度量空间，A 是 X 的子集，f 是定义在 A 上的实值函数. 证明：f 是连续函数 $\Leftrightarrow$ 对任意实数 c，集合 $A(f\leqslant c)$ 与 $A(f\geqslant c)$ 都是闭集.

证　由主要内容 8 知，必要性是显然的.

充分性　设有数 a,b，$b>a$，则

$$A(a<f<b)=A\setminus(A(f\leqslant a)\cup A(f\geqslant b)),$$

显然 $A(a<f<b)$是A 中的开集. 对直线上的任何开集G,有$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$,其中$(\alpha_n,\beta_n)$是$G$ 的构成区间,于是

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A\quad(\alpha_n<f<\beta_n).$$

而$f^{-1}(G)$是至多可列个开集之并,故仍为开集.依主要内容8,f 是连续的.

例10 设f 是定义于度量空间X 中闭集E 上的实值函数,若对每个$x_0\in E$,

$$\lim_{r\to 0}\sup\{f(x)\,|\,x\in N(x_0,r)\cap E\}\leqslant f(x_0),$$

则称f 在E 上是上半连续的. 证明:f 为E 上的上半连续函数$\Longleftrightarrow$对任何常数a,$E(f\geqslant a)$是X 中的闭集.

证 记$E_a=E(f\geqslant a)$.

必要性 设$x\in E_a'$,则存在$x_n\in E_a$ $(n=1,2,\cdots)$,使得$x_n\to x$. 因为$f(x_n)\geqslant a$,所以

$$\sup\{f(y)\,|\,y\in N(x,r)\cap E\}\geqslant a.$$

于是
$$a\leqslant\lim_{r\to 0}\sup\{f(y)\,|\,y\in N(x,r)\cap E\}\leqslant f(x),$$

即得$x\in E_a$. 故$E(f\geqslant a)$是X 中的闭集.

充分性 用反证法证. 设E_a 是闭集,若存在x_0,使得

$$\lim_{r\to 0}\sup\{f(x)\,|\,x\in N(x_0,r)\cap E\}>f(x_0),$$

则一定有$\{x_n\}\subset E$,使得$x_n\to x$,且令

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{r\to 0}\sup\{f(x)\,|\,x\in N(x_0,r)\cap E\}=A>f(x_0),$$

故可取a,使$A>a>f(x_0)$,即存在N,当$n>N$ 时有$f(x_n)>a$,亦即

$$x_n\in E_a\Longrightarrow x_0\in E_a\Longrightarrow f(x_0)\geqslant a.$$

这与前面a 的取法矛盾,故

$$\lim_{r\to 0}\sup\{f(x)\,|\,x\in N(x_0,r)\cap E\}\leqslant f(x_0),$$

即f 为E 上的上半连续函数.

例11 设$D:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$,其中$C^{(1)}[a,b]$是$[a,b]$上具

有一阶连续导数的函数全体，在 $C^{(1)}[a,b]$ 上按距离 $\rho_1(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$ 定义

$$Dx(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t),\ x\in C^{(1)}[a,b].$$

问：D 是否连续映射？若取距离

$$\rho_2(x,y)=\max_{i=0,1}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|,$$

则 D 是否连续？

解 在度量空间 $(C^{(1)}[a,b],\rho_1)$ 上，令 $x_n(t)=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n(t-a)}$，则 $\rho_1(x_n,0)\xrightarrow{n\to\infty}0$，但 $\rho_1(Dx_n,0)=1$，所以 D 不是连续映射.

在度量空间 $(C^{(1)}[a,b],\rho_2)$ 上，对任意 $x,y\in C^{(1)}[a,b]$，有

$$\rho(Dx,Dy)=\max_t|Dx(t)-Dy(t)|=\max_t|x'(t)-y'(t)|$$
$$\leqslant\rho_2(x,y),$$

其中 ρ 是 $C[a,b]$ 上距离，即

$$\rho(x,y)=\max_t|x(t)-y(t)|,$$

所以 D 是连续映射.

第三节 赋范线性空间

主要内容

要求熟悉高等代数中线性空间(包括实线性空间与复线性空间)概念，熟悉线性空间中向量的线性相关与线性无关的概念.

1. 定义1 设 A 是线性空间 X 的一个线性无关向量组，若每一个非零向量 $x\in X$，都是 A 中向量的线性组合，则称 A 是线性空间 X 的一个**线性基**.

若线性空间 X 存在一组由有限个线性无关向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的基，则称 X 是**有限维**的. 线性空间的维数是惟一确定的.

2. **定义2** 设X',X''是两个线性空间,同为实的(或复的). 如果在X'与X''间存在一个一一映射,使得对于任何一对$x,y\in X'$及任何实数(或复数)α,有

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad \varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x),$$

则称X'和X''是**线性同构的**,φ称为X'与X''间的**线性同构映射**.

3. **定义3** 设L是线性空间X的一个子集. 若L对X中的线性运算是封闭的,即对任何$x,y\in L$和任何数α,β,都有$\alpha x+\beta y\in L$,则称L是X的一个**线性子空间,简称子空间**.

设A为一个指标集,可以是无限的. $\{x_\lambda\}$,$\lambda\in A$是X中一族向量,则一切由$\{x_\lambda\}$中有限个向量的线性组合所得到的向量

$$y=\alpha_1 x_{\lambda_1}+\alpha_2 x_{\lambda_2}+\cdots+\alpha_k x_{\lambda_k}$$

$$(\lambda_i\in A,i=1,2,\cdots,k;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{ 是数})$$

全体M是X的一个线性子空间. M称为由$\{x_\lambda\}$张成的子空间(或称M是$\{x_\lambda\}$的**线性包**).

4. **定义4** 设X为线性空间,若$\forall\ x\in X$,有一个确定的实数$p(x)$与之对应,且满足

(1)$p(x)\geqslant 0$,

(2)$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$,α为任意实(或复)数,

(3)$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$,$x,y\in X$,

则称$p(x)$是x的**半范数**;若同时满足

(4)$p(x)=0$,必有$x=\theta$,

则称$p(x)$是x的**范数**,记做$\|x\|$. 并称X按范数$\|\cdot\|$为**赋范线性空间**,记做$(X,\|\cdot\|)$.

5. **定理1** (1)赋范线性空间必是度量空间. 特别地,$\rho(x,y)=\|x-y\|$是此空间上的度量函数.

(2)范数是变元x的连续函数,即若$x_n\to x$,则$\|x_n\|\to\|x\|$.

(3)若$x_n,y_n,x\in X$,$\lambda_n,\lambda\in\Phi$,且$x_n\to x$,$y_n\to y$,$\lambda_n\to\lambda$,则

$$x_n+y_n\to x+y,\quad \lambda_n x_n\to\lambda x.$$

对于$x_n\to x$ $(n\to\infty)$,也称点列$\{x_n\}$按范数收敛于x,记做

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

6. 定理2 设X是赋范线性空间，ρ是由范数导出的度量，对于所有$x,y,a\in X$，每个$\alpha\in\Phi$，有

(1)$\rho(x+a,y+a)=\rho(x,y)$（平移不变性）；

(2)$\rho(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\rho(x,y)$（绝对齐次）.

疑难解析

赋范线性空间与度量空间之间有何关系？

答 每个赋范线性空间都是度量空间. 设$(X,\|\cdot\|)$是线性赋范空间，则以$\rho(x,y)=\|x-y\|$定义的X上的度量称为由范数$\|\cdot\|$诱导的度量. 今后说到一个赋范线性空间的度量时，总是指由它的范数诱导的度量.

可以证明，线性空间X上的度量ρ使得X成为赋范线性空间，当且仅当ρ满足

(1)$\rho(ax,\theta)=|a|\rho(x,\theta),\forall\ x\in X,a\in\Phi$；

(2)$\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y),\forall\ x,y,z\in X$.

但是，并非所有度量空间的度量都是由范数导出的，此时，上述(1),(2)不一定满足，所以度量空间不一定是赋范线性空间.

方法、技巧与典型例题分析

赋范线性空间是特殊的线性空间，在讨论赋范线性空间时，必须熟悉一般线性空间的性质以及赋范线性空间的特殊性质.

例1 证明：$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_j=t^j$是$C[a,b]$中一个线性无关组，$j=0,1,\cdots,n-1$.

证 设$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\theta$（零元），$x_j=t^j$，$t$在$[a,b]$中任取$n$个不同的值$t_1,t_2,\cdots,t_n$，代入上式，可以得到一个齐次线性方程组，其系数行列式的转置D^{T}是范德蒙行列式. 因为$t_1,t_2,\cdots,t_n$取不同值，故$D=D^{\mathrm{T}}\neq0$. 从而方程组只有零解$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，即$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个线性无关组.

例2 指出下列$\mathbf{R}^3$的子集中哪些能构成$\mathbf{R}^3$的子空间，这里，$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

(1)$\xi_1=\xi_2,\xi_3=0$ 的所有 x；

(2)$\xi_1=\xi_2+1$ 的所有 x；

(3)$\xi_1>0,\xi_2>0,\xi_3>0$ 的一切 x；

(4)$\xi_1-\xi_2+\xi_3=k$ (k 为常数)的全体 x.

解 按子空间定义(见主要内容4)考察，确定：

(1)对线性运算封闭，是子空间.

(2)对线性运算不封闭，不是子空间.

(3)对线性运算不封闭，不是子空间.

(4)当$k\neq0$ 时，对线性运算不封闭，不是子空间；当$k=0$ 时，对线性运算封闭，是子空间.

例3 证明：所有实二阶方阵构成一线性空间X. 指出X 中的零向量、X 的维数及X 的一个基.

证 任取三个实二阶矩阵$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\in X$，则

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\right],$$

X 中存在$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，使得对于每个$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in X$，有

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

对于每个$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，存在$\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{12}\\-a_{21}&-a_{22}\end{pmatrix}\in X$，使得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于数量α,β及$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\in X$，有

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,\quad 1A=A,$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$$

所以，所有实二阶矩阵构成一线性空间X.

X的零向量是$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，即零矩阵. 线性空间$X$的维数为4，其一个基是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例4 证明：在n维向量空间X中，任意$x\in X$，可以惟一地表示成已知基向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$的线性组合.

证 因为X是n维向量空间，$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关，所以$e_1,e_2,\cdots,e_n,x$必线性相关. 即存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使得

$$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n+k_{n+1}x=\theta(\text{零向量}).$$

因为$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关，所以$k_{n+1}\neq 0$，从而

$$x=\frac{-1}{k_{n+1}}(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n.$$

若又有
$$x=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n,$$
则
$$x-x=(\alpha_1-\beta_1)e_1+(\alpha_2-\beta_2)e_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)e_n=\theta.$$

因为$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关，所以$\alpha_i=\beta_i,i=1,2,\cdots,n$. 即$x$的表示式惟一.

例5 设$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是复向量空间X的基，找一个基，使X成为实向量空间，并求其维数.

解 因为$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关，所以$\mathrm{i}e_1,\mathrm{i}e_2,\cdots,\mathrm{i}e_n$也线性无关，从而$(e_1,e_2,\cdots,e_n,\mathrm{i}e_1,\mathrm{i}e_2,\cdots,\mathrm{i}e_n)$为实向量空间的一个基，维数为$2n$.

例6 设W是所有与给定的n阶实矩阵$\boldsymbol{M}$可交换的实矩阵集合，证明：W是$\mathbf{R}^{n\times n}$(由数域上一切$n\times n$矩阵构成的线性空间)的子空间.

证 因为$\mathbf{R}^{n\times n}$中的单位元$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$，满足$\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{M}$，即$\boldsymbol{E}_n\in W$，所以$W$是非空集合.

$\forall\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in W$，有$\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{AM},\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{BM}$，于是

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{BM}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{M},$$
$$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{M}=k(\boldsymbol{AM})=k(\boldsymbol{MA})=\boldsymbol{M}(k\boldsymbol{A}).$$

故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}\in W$，即$W$对$\mathbf{R}^{n\times n}$中的加法与数乘封闭，$W$是$\mathbf{R}^{n\times n}$的子空间.

例7 设U是线性空间V的一个子空间，证明：若U与V的维数相等，则$U=V$.

证 只需证它们有相同的基或者相互包含即可.

设U与V的维数相等，均为r. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$U$的一个基. 因为$U\subset V$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是$V$的一组线性无关向量，从而也是$V$的一个基. 于是，有$U=V$.

例8 设X为数域K上的赋范线性空间，证明：线性运算关于范数是连续的. 即对$\alpha_n,\beta_n,\alpha,\beta\in K,x_n,y_n,x,y\in X$，当$\alpha_n\to\alpha,\beta_n\to\beta,x_n\to x,y_n\to y$时，有

$$\alpha_nx_n+\beta_ny_n\to\alpha x+\beta y,$$

且当$\|x_n\|\neq0,\|x\|\neq0$时，有$\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\to\dfrac{x}{\|x\|}$.

证 因为

$$\|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|,$$

同理 $$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|,$$

所以 $$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\|,$$

又 $$\begin{aligned}&\|\lambda_n x_n + \mu_n y_n - \lambda x - \mu y\| \\ \leqslant& \|\lambda_n x_n - \lambda x\| + \|\mu_n y_n - \mu y\| \\ \leqslant& |\lambda_n|\,\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\,\|x\| \\ &+ |\mu_n|\,\|y_n - y\| + |\mu_n - \mu|\,\|y\|,\end{aligned}$$

故当$n\to\infty$时，$\lambda_n x_n + \mu_n y_n \to \lambda x + \mu y$.

因为$\|x_n\| \to \|x\|$，所以$\dfrac{1}{\|x_n\|} \to \dfrac{1}{\|x\|}$. 于是，当$\|x_n\| \neq 0$，$\|x\| \neq 0$时，$\dfrac{x_n}{\|x_n\|} \to \dfrac{x}{\|x\|}$.

例9 证明：

(1) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的范数；

(2) $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$是$C[a,b]$上的范数.

证 只需验证满足范数定义中的条件.

(1) $\|x\|_\infty \geqslant 0$，且 $\|x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$ 及 $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\,\|x\|_\infty$是显然的.

下证三角不等式成立.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i + \eta_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (|\xi_i| + |\eta_i|) \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| + \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\eta_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,\end{aligned}$$

所以 $$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|,\ x \in (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$$

是$\mathbf{R}^n$上的一个范数.

(2)对于$x \in C[a,b]$，

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant 0$$

是显然的，$\| x \|_p=0 \Longrightarrow x(t)=0$，即 $x=\theta$，$\| \theta \|_p=0$.

$\| \alpha x \|_p=|\alpha| \| x \|_p$ 显然成立.

$\forall\, x,y\in C[a,b]$，由闵可夫斯基不等式，有

$$\begin{aligned}\| x+y \|_p &=\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &\leqslant\left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &=\| x \|_p+\| y \|_p,\end{aligned}$$

所以，$\| x \|_p$ 是$C[a,b]$上的范数.

例 10 设 X 为赋范线性空间，令

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y, \\ \| x-y \| +1, & x\neq y,\end{cases}$$

证明：(X,ρ)是度量空间，但 ρ 不是由范数导出的度量.

证 证明 $\rho(x,y)$满足度量定义，但不满足范数定义.

$\rho(x,y)$满足非负性与对称性是明显的. 下证三角不等式成立.

若 $x=y$，则

$$\rho(x,y)=0\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y);$$

若 $x\neq y$，则当 $x\neq z,z\neq y$ 时，有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)=\| x-y \| +1&\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y) \\ &=\| x-z \| +1+\| z-y \| +1.\end{aligned}$$

当 $x=z,z\neq y$ 时，有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)=\| x-y \| +1&\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y) \\ &=0+\| z-y \| +1=\| x-y \| +1;\end{aligned}$$

当 $x\neq z,z=y$ 时，有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)=\| x-y \| +1&\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y) \\ &=\| x-z \| +1+0=\| x-y \| +1.\end{aligned}$$

所以，$\rho(x,y)$是度量，(X,ρ)是度量空间.

然而

$$\rho(x,\theta)=\begin{cases}\|x\|+1, & x\neq\theta\\ 0, & x=\theta\end{cases}$$

不满足范数定义，因为$\rho(\alpha x,\theta)\neq|\alpha|\rho(x,\theta)$. 所以$\rho$不是范数诱导出的度量.

例 11 设线性空间X按ρ成为度量空间，且ρ满足

$$\rho(x-y,\theta)=\rho(x,y),\quad \rho(ax,\theta)=|a|\rho(x,\theta),$$

其中$x,y\in X,\alpha\in\Phi$. 证明：X按照$\|x\|=\rho(x,\theta),x\in X$成为赋范线性空间.

证 证明$\|x\|=\rho(x,\theta)$满足范数定义的条件.

$\|x\|=\rho(x,0)\geqslant 0$是明显的，对任何数$\alpha$，有

$$\|\alpha x\|=\rho(\alpha x,\theta)=|\alpha|\rho(x,\theta)=|\alpha|\,\|x\|.$$

又 $$\begin{aligned}\|x+y\|&=\rho(x+y,\theta)=\rho(x,-y)\leqslant\rho(x,\theta)+\rho(\theta,-y)\\&=\rho(x,\theta)+\rho(-y,\theta)=\rho(x,\theta)+\rho(y,\theta)\\&=\|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

所以，$\|x\|$是X上的范数.

例 12 设X_0是赋范线性空间X的子空间，证明：$\overline{X}_0$也是X的子空间.

证 设$x_0,y_0\in\overline{X}_0$，则存在$\{x_n\},\{y_n\}\subset X_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0,$$

于是 $$\alpha x_0+\beta y_0=\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n).$$

由于$\alpha x_n+\beta y_n\in X_0$，所以$\alpha x_0+\beta y_0\in\overline{X}_0$，即$\overline{X}_0$是$X$的子空间.

例 13 设$V[a,b]$是$[a,b]$上有界变差函数的全体，对于每个$f\in V[a,b]$，定义$\|f\|=|f(a)|+\bigvee_a^b(f)$，其中$\bigvee_a^b(f)$为$f$在$[a,b]$上的全变差，即

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_\pi\sum_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|.$$

这里π代表$[a,b]$的任一分割$a=a_1<b_1\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n=b$，$V[a,b]$是线性空间，证明：$V[a,b]$是赋范线性空间.

证 (1) $\|f\|\geqslant 0$ 是显然的. 若 $\|f\|=0$,则 $f(a)=0$, $\bigvee_a^b(f)=0$,则

$$\sup_\pi \sum_{i=1}^n |f(b_i)-f(a_i)|=0,$$

其中上确界是对任一组分划 $a=a_1<b_1\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n=b$ 取的,故 $\forall\ t\in[a,b]$, $f(t)=f(a)=0$,即 $f=\theta$.

(2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$.

(3)对于任一组分点 $a=a_1<b_1\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n=b$,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n |(f+g)(b_i)-(f+g)(a_i)|\\&=\sum_{i=1}^n |f(b_i)-f(a_i)+g(b_i)-g(a_i)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n |f(b_i)-f(a_i)|+\sum_{i=1}^n |g(b_i)-g(a_i)|\\&\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g),\end{aligned}$$

即
$$\bigvee_a^b(f+g)\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g).$$

又
$$|(f+g)(a)|\leqslant|f(a)|+|g(a)|,$$

故
$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|,$$

从而知 $V[a,b]$ 是赋范线性空间.

若记

$V_0[a,b]=\{f\in V[a,b]\mid f(a)=0, f$ 在 (a,b) 内右连续$\}$,

则 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的线性子空间, $V_0[a,b]$ 上的范数是

$$\|f\|=\bigvee_a^b(f).$$

例 14 设 X 是数域 K 上的赋范线性空间,证明:线性运算关于范数是连续的.

证 证明 $\alpha_n,\beta_n,\alpha,\beta\in K$, $x_n,y_n,x,y\in X$,当 $\alpha_n\to\alpha$, $\beta_n\to\beta$, $x_n\to x$, $y_n\to y$ 时,有

$$\alpha_n x_n+\beta_n y_n \to \alpha x+\beta y,$$
故只需证明加法与数乘分别是连续的. 由
$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\| \leqslant \|x_n-x\|+\|y_n-y\| \to 0\ (n\to\infty)$$
知,加法是连续的. 又设$M>0$,满足$|\alpha_n|\leqslant M$,$n=1,2,\cdots$,由
$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\| &\leqslant \|\alpha_n x_n-\alpha_n x+\alpha_n x-\alpha x\| \\ &\leqslant M\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\,\|x\| \to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$
知,数乘也是连续的.

例 15 设线性空间X按ρ成为度量空间,而且ρ满足
$$\rho(x-y,\theta)=\rho(x,y), \quad \rho(\alpha x,\theta)=|\alpha|\rho(x,\theta),$$
其中x,y是X中的任意元,α是任意数. 证明:X按照$\|x\|=\rho(x,\theta)$,$x\in X$成为赋范线性空间.

证 $\|x\|=\rho(x,\theta)\geqslant 0$. 当$\|x\|=0$,即$\rho(x,\theta)=0$时,$x=\theta$. 对任何数$\alpha$,有
$$\|\alpha x\|=\rho(\alpha x,\theta)=|\alpha|\rho(x,\theta)=|\alpha|\,\|x\|.$$
又
$$\begin{aligned}\|x+y\| &=\rho(x+y,\theta)=\rho(x,-y)\leqslant\rho(x,\theta)+\rho(\theta,-y) \\ &=\rho(x,\theta)+\rho(-y,\theta) \\ &=\rho(x,\theta)+\rho(y,\theta)=\|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$
所以,$\|\cdot\|$是X上的范数.

例 16 证明:在赋范线性空间中,任何收敛点列都是基本点列,任何基本列都是有界的.

证 设$\{x_n\}$是赋范线性空间中的一收敛点列,且$x_n\to x\ (n\to\infty)$,x是赋范线性空间中的点,则$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N(\varepsilon)$,当$n>N(\varepsilon)$时,有$\|x_n-x\|<\varepsilon/2$. 从而,当$n,m>N(\varepsilon)$时,有
$$\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$
即知$\{x_n\}$是基本点列.

设$\{x_n\}$是基本点列,则$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N(\varepsilon)$,当$n,m>N(\varepsilon)$时,有$\|x_n-x_m\|<\varepsilon$.

可以取$\varepsilon=1$,则存在$N_0\in\mathbf{N}$,当$m,n>N_0$时,有$\|x_n-x_m\|<1$. 再令$m=N_0+1$,则当$n>N_0$时,有

$$\|x_n\| \leqslant \|x_n - x_{N_0+1}\| + \|x_{N_0+1}\| < 1 + \|x_{N_0+1}\|.$$

令 $M = \max\{1 + \|x_{N_0+1}\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_N\|\}$,

于是,$\forall\, n \in \mathbf{N}$,有 $\|x_n\| \leqslant M$,即基本点列$\{x_n\}$是有界点列.

第四节 赋范线性空间的例子

主要内容

1. 定义1 设X是一个线性空间,A是X的一个子集.若对任意$x, y \in A$,连接它们的线段$\{\alpha x + (1-\alpha)y \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$都在$A$中,则称$A$为**凸集**.

线性空间X的每个线性子空间都是凸集.

2. 定义2 设f是$[a,b]$上的实值可测函数,$1 \leqslant p < \infty$,如果$|f|^p$是$[a,b]$上的勒贝格可积函数,则称f是$[a,b]$上**p方可积函数**. $[a,b]$上p方可积函数全体记为$L^p[a,b]$.(在$L^p[a,b]$中,两个几乎处处相等的函数视为同一元素而不加区别.)

$L^p[a,b]$是一个线性空间.

$L^p[a,b]$按范数$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$是一个赋范线性空间.

3. 赫尔德不等式 设$p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p[a,b]$, $g \in L^q[a,b]$,则$f \cdot g$在$[a,b]$上勒贝格可积,且

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \quad ①$$

成立.

闵可夫斯基不等式 设$p \geqslant 1$, $f, g \in L^p[a,b]$,则$f + g \in L^p[a,b]$,且

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \quad ②$$

成立.

4. 记满足$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$ $(p\geqslant 1)$的实数列(或复数列)$x=\{x_n\}$全体为l^p,按线性运算

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots),$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots),$$

l^p 是一个线性空间. l^p $(1\leqslant p<\infty)$按$\|x\|_p=\left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}$成为赋范线性空间.

l^p 中也有赫尔德不等式与闵可夫斯基不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}, \quad ①'$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}. \quad ②'$$

5. 设l^∞是有界实(或复)数列全体按通常的线性运算所成的线性空间. 对 $x\in l^\infty$,设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$,令 $\|x\|_\infty=\sup\limits_i|x_i|$,则$l^\infty$按范数

$$\|f\|_\infty=\inf_{m(E)=0}\left(\sup_{[a,b]\setminus E}|f(x)|\right)$$

成为赋范线性空间. $\|f\|_\infty$称为f **的本性最大模**,也记做

$$\|f\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

疑 难 解 析

如何理解凸集的意义?

答 主要内容1给出了凸集的定义,怎样理解其意义呢?下面给出一个具体的例子.

在欧几里德空间 $\mathbf{R}^2$ 上,对 $x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2$,规定 $\|x\|_p=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{1/p}$, $p\geqslant 1$,则 $\|\cdot\|_p$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个范数. 若记 $\|x\|_\infty=\max(|\xi_1|,|\xi_2|)$,则有 $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$,显然 $\|\cdot\|_\infty$也是 $\mathbf{R}^2$ 上的范数.

下面来看,关于这个范数,单位球$\{x|\ \|x\|<1\}$是怎样的集

合(见图1.2).

显然，对 $\|\cdot\|_\infty$，单位球是以$(\pm1,\pm1)$为顶点的正方形.

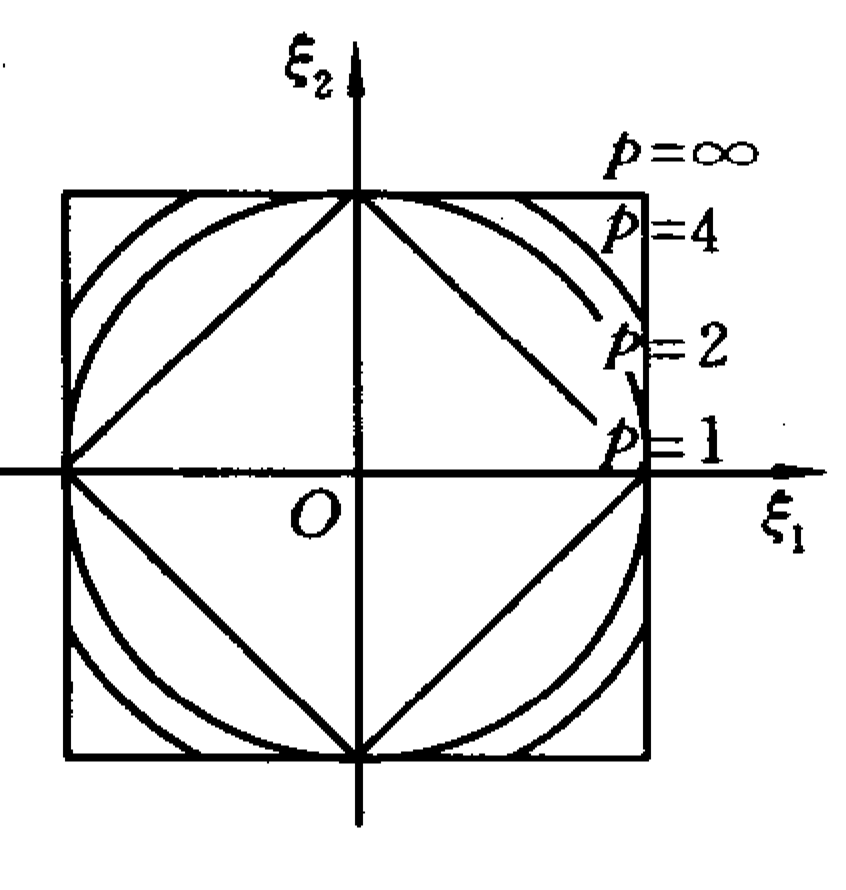


图1.2

对 $\|\cdot\|_4$，单位球是以点 O 为中心、位于以$(\pm1,\pm1)$为顶点的正方形内的椭圆.

对 $\|\cdot\|_2$，单位球是以点 O 为中心、半径为1的圆.

对 $\|\cdot\|_1$，单位球是以$(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)$为顶点的正方形.

对以上情形，即 $\|x\|<1, p\geqslant1$ 时，单位球是凸集，有

$$tx+(1-t)y\in\{x\mid\|x\|<1\}\ (0\leqslant t\leqslant1).$$

而实际上，任何赋范线性空间中的单位球都是凸集. 这是因为，当 $\|x\|<1, \|y\|<1, 0\leqslant t\leqslant1$ 时，有

$$\begin{aligned}\|tx+(1-t)y\|&\leqslant\|tx\|+\|(1-t)y\|\\&=t\|x\|+(1-t)\|y\|\leqslant t+(1-t)=1.\end{aligned}$$

当 $0<p<1$ 时，$\|x\|_p$ 不再成为范数，单位球也不再成为凸的. 例如

$$\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|_p=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p\right]^{1/p}=\left(2\times\frac{1}{2^p}\right)^{1/p}=2^{1/p-1}>1,$$

点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$不属于单位球. 又当$p=\frac{2}{3}$时，$\{x\mid\|x\|_p\leqslant1\}$即数学分析中星形线所围图形，显然不是凸的.

方法、技巧与典型例题分析

例1 证明：赋范线性空间中的任一开球$S(x_0,r)$是凸开集.

证 先证$S(x_0,r)$为开集. 因为$\forall\ x\in S(x_0,r)$，有 $\|x-x_0\|<r$，令 $r=(r-\|x-x_0\|)/2$，则 $S(x,r)\subset S(x_0,r)$，所以 x 为$S(x_0,r)$的内点，由 x 的任意性知$S(x_0,r)$中的每个点都是内点，从

而$S(x_0,r)$为开集.

再证$S(x_0,r)$为凸集. 因为$\forall\ x_1,x_2\in S(x_0,r)$,有

$$\|x_1-x_0\|<r,\ \|x_2-x_0\|<r,$$

令
$$z_0=tx_1+(1-t)x_2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

则
$$\begin{aligned}\|z_0-x_0\|&=\|tx_1+(1-t)x_2-[tx_0+(1-t)x_0]\|\\&=\|t(x_1-x_0)+(1-t)(x_2-x_0)\|\\&\leqslant t\|x_1-x_0\|+(1-t)\|x_2-x_0\|\\&\leqslant tr+(1-t)r=r,\end{aligned}$$

故
$$z_0\in S(x_0,r).$$

所以,$\forall\ x_1,x_2\in S(x_0,r)$,有

$$tx_1+(1-t)x_2\in S(x_0,r),0\leqslant t\leqslant 1,$$

从而$S(x_0,r)$为凸集.

综上知,$S(x_0,r)$为凸开集.

例2 证明:赋范线性空间X中任一凸集A的内部A°是凸开集.

证 同例1,先证A°是开集. 因为A°是由A的全体内点构成的集合,故若$A^\circ=\varnothing$,则A°是开集;若$A^\circ\neq\varnothing$,则$\forall\ x\in A^\circ$,必存在$S(x_0,r)$,使得$S(x_0,r)\subset A$. 而$S(x_0,r)$为开集,则$S(x,r)$中每一点均为A的内点,从而$S(x,r)\subset A^\circ$,即x是A°的内点,故由x的任意性知,A°为开集.

再证A°是凸集. 若$A^\circ=\varnothing$,则A°必为凸集;若$A^\circ\neq\varnothing$,$\forall\ x_1,x_2\in A^\circ$,因为$x_1,x_2$是$A^\circ$的内点,所以存在开球$S(x_1,r)\subset A^\circ$,$S(x_2,r)\subset A^\circ$,当$\|h\|<r$时,$x_1+h\in A$,$x_2+h\in A$. 由$A$为凸集知,若令$z=tx_1+(1-t)x_2$,则

$$x_0+h=t(x_1+h)+(1-t)(x_2+h)\in h,$$

故$S(z_0,r)\subset A$,即z_0是A的内点,因此$z_0\in A^\circ$,从而A°为凸集.

综上知,A°为凸开集.

例3 证明:

$$A=\{x\in C[0,1]\,|\,x=x(t)\geqslant 0,\ \forall\ t\in[0,1]\}$$

是连续函数空间$C[0,1]$中的闭凸集.

证 先证A是凸集. $\forall\ x(t),y(t)\in A,\lambda\in[0,1]$,由$x(t)\geqslant 0$,$y(t)\geqslant 0$,且$x(t),y(t)$在$[0,1]$上连续,得

$$\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)\geqslant 0,$$

且$\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)$在$[0,1]$上连续,所以$\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)\in A$,故$A$是凸集.

再证A是闭集. 若$x_n(t)\in A$,且$x_n(t)\to x(t)$,令$\|x(t)\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$,由于$x_n(t)$按范数收敛于$x(t)$等价于$x_n(t)$在$[0,1]$上一致收敛于$x(t)$,而一致收敛的连续函数的极限是连续函数. 又由极限的保号性知$x(t)\in C[0,1]$且$x(t)\geqslant 0$,即$x(t)\in A$,故$A=\overline{A}$,即A为闭集.

综上知,A是连续函数空间$C[a,b]$上的闭凸集.

例4 证明:赋范线性空间X的子集A有界的充要条件是:存在一个正数c,使得对于每个$x\in A$,有$\|x\|<c$.

(在度量空间(X,ρ)中,非空集合A的直径$\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)$,若$\delta(A)<\infty$,则称$A$为有界集.)

证 设A有界,则

$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A}\rho(x,y)=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|=b<\infty.$$

取一固定的$x_0\in A$,令$c=b+\|x_0\|$,则$\forall\ x\in M$,有

$$\|x\|=\|x-x_0+x_0\|<\|x-x_0\|+\|x_0\|\leqslant b+\|x_0\|=c.$$

反之,若$\forall\ x\in A$,有$\|x\|<c$,则对于所有$x,y\in A$,有

$$\|x-y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\leqslant 2c,$$

所以$\delta(A)\leqslant 2c$. 即A为有界集.

例5 设$1<p<q<\infty$,证明:

$$l^1\subset l^p\subset l^q\subset C\subset l^\infty,$$

而且以上的包含关系都是严格的.

证 首先,设$1\leqslant p<q<\infty$,对于$x=\{x_n\}\in l^p$,有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<$

$+\infty$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，从而 $x\in C$（这里 C 是 l^∞ 的子集，是收敛数列全体）．又存在 $k\in\mathbf{N}$，使得当 $n>k$ 时，有 $|x_n|\leqslant 1$，从而 $|x_n|^q\leqslant|x_n|^p$. 得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\leqslant\sum_{n=1}^{k}|x_n|^q+\sum_{n=k+1}^{\infty}|x_n|^p<\infty,$$

即 $x\in l^q$，于是 $l^p\subset l^q$. 而 $l^q\subset C\subset l^\infty$ 是显然的，从而，当 $1<p<q<\infty$ 时，有

$$l^1\subset l^p\subset l^q\subset C\subset l^\infty.$$

下证严格性．对于 $p>1$，有

$$x=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}\in l^p,$$

但是 $x\overline{\in}l^1$，所以 $l^1\subsetneqq l^p$.

同样，$x=\{1/n^{1/p}\}\in l^q\setminus l^p$，所以 $l^p\subsetneqq l^q$.

又 $x=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}\in C\setminus l^q$，所以 $l^q\subsetneqq C$.

而 $x=\{(-1)^n\}\in l^\infty\setminus C$，所以 $C\subsetneqq l^\infty$.

综上知，$$l^1\subset l^p\subset l^q\subset C\subset l^\infty,$$

而且包含关系是严格的.

例6 设 $1<p<q<\infty$，证明：

$$C[a,b]\subset L^\infty[a,b]\subset L^q[a,b]\subset L^p[a,b]\subset L[a,b],$$

且包含关系是严格的.

证 由定义，有

$$C[a,b]\subsetneqq L^\infty[a,b]\subsetneqq L^q[a,b].$$

设 $x\in L^q[a,b]$，记

$$E=\{t\,|\,t\in[a,b],|x(t)|\leqslant 1\},$$

则
$$\begin{aligned}\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t&=\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t+\int_{[a,b]\setminus E}|x(t)|^p\mathrm{d}t\\&\leqslant m(E)+\int_{[a,b]\setminus E}|x(t)|^p\mathrm{d}t\\&\leqslant m(E)+\int_a^b|x(t)|^q\mathrm{d}t<\infty.\end{aligned}$$

从而 $x\in L^p[a,b]$，即 $L^q[a,b]\subset L^p[a,b]$. 这里同时也证明了 $L^p[a,b]\subset L[a,b]$.

若取 $x(t)=(t-a)^{-1/q}$，则显然有

$$x\in L^p[a,b]\backslash L^q[a,b].$$

类似地，取 $x_1(t)=(t-a)^{-1/p}$，则

$$x_1\in L[a,b]\backslash L^p[a,b].$$

从而
$$L^q[a,b]\subsetneqq L^p[a,b]\subsetneqq L[a,b].$$

综上知

$$C[a,b]\subset L^\infty[a,b]\subset L^q[a,b]\subset L^p[a,b]\subset L[a,b],$$

而且包含关系是严格的.

例 7 设$(X_1,\|\cdot\|_1)$与$(X_2,\|\cdot\|_2)$是赋范线性空间，证明：

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2),\quad x=(x_1,x_2)$$

是乘积空间 $X=X_1\times X_2$ 上的范数.

证 因为

$$\|x\|=0\Longleftrightarrow\|x_1\|_1=\|x_2\|_2=0\Longleftrightarrow x=(0,0)=\theta.$$

设
$$x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2),$$

则
$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\max(\|x_1+y_1\|_1,\|x_2+y_2\|_2)\\&\leqslant\max(\|x_1\|_1+\|y_1\|_1,\|x_2\|_2+\|y_2\|_2)\\&\leqslant\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2)+\max(\|y_1\|_1,\|y_2\|_2)\\&=\|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

满足范数的条件，是 $X_1\times X_2$ 上的范数.

例 8 设 $p,q,r>1$，且 $1/p+1/q+1/r=1$，又

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p,\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^q,$$
$$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)\in l^r,$$

证明：
$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i\zeta_i|\leqslant\|x\|_p\|y\|_q\|z\|_r.$$

证 因为

$$\{|\eta_i|^{qr/(q+r)}\}\in l^{(q+r)/r},\quad\{|\zeta_i|^{qr/(q+r)}\}\in l^{(q+r)/r},$$

而$\frac{r}{q+r}+\frac{q}{q+r}=1$，所以$\{|\eta_i\zeta_i|^{qr/(q+r)}\}\in l^1$，且

$$\begin{aligned}&\sum_i|\eta_i\zeta_i|^{qr/(q+r)}\\&\leqslant\Big(\sum_i|\eta_i|^{qr/(q+r)\cdot(q+r)/r}\Big)^{r/(q+r)}\Big(\sum_i|\zeta_i|^{qr/(q+r)\cdot(q+r)/q}\Big)^{q/(q+r)}\\&=(\|y\|_q\|z\|_r)^{qr/(q+r)}.\end{aligned}$$

又由$\frac{1}{p}+\frac{q+r}{qr}=1$，类似可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i\zeta_i|&\leqslant\Big(\sum_i|\xi_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_i|\eta_i\zeta_i|^{qr/(q+r)}\Big)^{(q+r)/qr}\\&=\|x\|_p\|y\|_q\|z\|_r.\end{aligned}$$

例9 记C_0是收敛于零的数列全体，对$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in C_0$，规定$\|x\|=\sup\limits_n\|x_n\|$，证明：$C_0$是$l^\infty$的闭线性子空间.

证 由收敛数列的有界性知，$C_0\subset l^\infty$. $\forall\ x,y\in C_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对任何数$\alpha,\beta$，必有$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=0$，从而

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n,\cdots)\in C_0,$$

故C_0是l^∞的线性子空间.

再证C_0是闭空间. 设

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)},\cdots)\in C_0,$$
$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\cdots)\in l^\infty,$$

且
$$\|x^{(k)}-x^{(0)}\|=\sup_n|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{2},$$

则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，当$k>N_1$时，有

$$\|x_n^{(0)}\|\leqslant|x_n^{(k)}|+|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|<|x_n^{(k)}|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定k，则由$x^{(k)}\in C_0$知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=0$，从而可取到$N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时，有$|x_n^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是，当$n>N$时，

$$|x_n^{(0)}|<|x_n^{(k)}|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

知 $x^{(0)}\in C_0$，从而 C_0 是 l^∞ 的闭子空间.

例10 设 X 与 Y 都是赋范线性空间，$T: X\to Y$ 是一个映射，证明下列命题等价：

(1)对 X 中任一点列 $\{x_n\}$，当 $x_n\to x_0$ 时，$Tx_n\to Tx_0(n\to\infty)$；

(2)T 在 $x_0\in X$ 处连续；

(3)对于 Tx_0 的任一 ε 邻域 $U(Tx_0,\varepsilon)$，存在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$，使得 $TU(x_0,\delta)\subset U(Tx_0,\varepsilon)$，且

$$TU(x_0,\delta)=\{Tx\mid x\in U(x_0,\delta)\}.$$

证 (1)$\Rightarrow$(2). 用反证法证. 设(1)成立，而(2)不成立，即存在 $\varepsilon_0>0$，使得对每一个 $1/n$，均有 $x_n\in X$，满足 $\|x_n-x_0\|<1/n$，但 $\|Tx_n-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0$. 与(1)矛盾. 故(2)必成立.

(2)$\Rightarrow$(3). 因为(2)成立，故 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$. 因此，$\forall\ U(x_0,\varepsilon)$ 都存在 $U(x_0,\delta)$，当 $\forall\ x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $Tx\in U(Tx_0,\varepsilon)$，即

$$TU(x_0,\delta)=\{Tx\mid x\in U(x_0,\delta)\}\subset U(Tx_0,\varepsilon).$$

(3)$\Rightarrow$(1). 对任 $\{x_n\}\in X$，有 $x_n\to x_0\in X$，则对(3)中的 δ，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得对 $n>N$，有 $\|x_n-x_0\|<\delta$，即 $x_n\in U(x_0,\delta)$. 故此时 $Tx_n\in U(Tx_0,\varepsilon)$，即 $\|Tx_n-Tx_0\|<\varepsilon$. 从而 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$\|Tx_n-Tx_0\|<\varepsilon\quad 即\quad Tx_n\to Tx_0\quad(n\to\infty).$$

第五节 稠密性与可分性

主要内容

1. **定义1** 设 X 是度量空间，E 和 F 是 X 中的点集，如果 F 中任一点的任一邻域中都含有 E 中的点，则称 E 在 F 中**稠密**.

以下命题等价：

(1)E 在 F 中稠密；　　(2)$\overline{E}\supset F$；

(3)$\forall\ x\in F$,存在 E 中的点列$\{x_n\}$,使得 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.

2. 定理1 设X 是度量空间,A,B,C 是X 中的点集,若C 在B 中稠密,B 在 A 中稠密,则C 在 A 中稠密.

3. 多项式全体所构成的线性空间 P,可以看做度量空间 $C[a,b]$的子集,P 在$C[a,b]$中是稠密的.

4. 设 $1\leqslant p<\infty$,$B[a,b]$是$[a,b]$上的有界可测函数全体,则 $B[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密.

5. 定义2 设X 是度量空间,若X 中有一个点集A,存在有限集或可列集$\{x_n\}\subset X$ 在 A 中稠密,则称 A 是**可分点集**(或**可析点集**).

若度量空间 X 有一个可列的稠密子集,则称 X 为**可分空间**(或**可析空间**).

6. 定义3 设X 为度量空间,A 是X 的子集,若A 不在X 的任何一个非空的开球中稠密,则称A 为**疏朗集**(或称为**无处稠密集**).

7. 定义4 设度量空间X 中的点集A 能表示成至多可列个疏朗集的并,则称 A 为 X 中的**第一纲的集**,X 中不是第一纲的集称为**第二纲的集**.

疑 难 解 析

1. 为什么要研究稠密性概念?

答 由主要内容知,若点集 A 在点集 E 中稠密,则$\forall\ x\in E$,必有 A 中的点列$\{x_n\}$,当$n\to\infty$时,$x_n\to x$. 同时,稠密还有传递性,即对 X 中的点集 A,B,C,若 B 在 A 中稠密,C 在 B 中稠密,则C 在 A 中稠密.

根据以上概念,当需要考察点集E 是否具有某种性质时,可以转而考察它的稠密子集,然后利用极限过程推出关于集合 E 的相应结论,使问题的研究简化.

2. 可分空间与稠密集有何关系?

答 由可分空间定义知,在可分空间 X 中一定有稠密的可列

集. 这时,必有 X 中的有限个或可列个点在 X 中稠密.

当研究可分空间中的某些问题时,为了简便,可以从空间中选出一个最适合研究该问题的可列的稠密集,先在该稠密集上进行讨论,然后利用稠密性将结论推广到整个空间上去.

由此可知,稠密性与可分性是研究度量空间的两个重要性质.

方法、技巧与典型例题分析

要求理解稠密性与可分性概念,并能判定集合是否稠密、是否可分.

例1 设 E 和 F 是度量空间中的点集,证明下列命题等价:

(1)E 在 F 中稠密;

(2)$\overline{E}\supset F$;

(3)$\forall\ x\in F$,有 E 中点列$\{x_n\}$,使 $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 E 在 F 中稠密,则 $\forall\ x\in F$,若 $x\in E$,必有 $x\in\overline{E}$;若 $x\overline{\in}E$,则 $\forall\ N(x)$,$(N(x)\setminus\{x\})\cap E=N(x)\cap E\neq\varnothing$,即得 $x\in E'\subset\overline{E}$. 所以 $F\subset\overline{E}$.

(2)$\Longrightarrow$(3). 若 $F\subset\overline{E}$,则 $\forall\ x\in F$,有 $x\in E$ 或 $x\in E'$. 当 $x\in E$ 时,取 $x_n=x$, $n=1,2,\cdots$,即有 $x_n\to x$;当 $x\in E'$ 时,由聚点定义,必存在$\{x_n\}\subset E$,使得 $x_n\to x$.

(3)$\Longrightarrow$(1). 若 $\forall\ x\in F$,$\exists\ \{x_n\}\subset E$,使得 $x_n\to x$,于是,$\forall\ N(x)$,$\exists\ n_0\in\mathbf{N}$,使得 $n>n_0$ 时,$x_n\in N(x)$. 于是 $N(x)\cap E\neq\varnothing$,从而 E 在 F 中稠密.

例2 设 X 是度量空间,$E\subset X$,证明以下命题等价:

(1)E 在 X 中无处稠密;

(2)$\overline{E}$ 在 X 中无处稠密;

(3)对于 X 中任一非空开球 U,存在非空开球 $V\subset U$,使得 $V\cap E=\varnothing$.

证 由定义可知(1)与(2)等价.

(1)$\Longrightarrow$(3). 若E在X中无处稠密，即$(\overline{E})^\circ=\varnothing$，则对任何开球$U$，$U\setminus\overline{E}\neq\varnothing$. 由于$U\setminus\overline{E}$是开集，所以存在开集$V\subset U\setminus\overline{E}$.

(3)$\Longrightarrow$(1). 若$(\overline{E})^\circ\neq\varnothing$，取$U=(\overline{E})^\circ$，则对于任何开球$V\subset U$，$V\subset\overline{E}$，由$E$在$X$中稠密等价于对$X$中的任一非空开集$U$，$E\cap U\neq\varnothing$，推出矛盾，从而$E$在$X$中无处稠密.

例3 记P为多项式全体所成的线性空间，把它看做度量空间$C[a,b]$的子集，证明：P在$C[a,b]$上是稠密的.

证 由数学分析中的维尔斯特拉斯定理知，对$[a,b]$上的任何一个连续函数f，必存在一列多项式P_n在$[a,b]$上一致收敛于f，即P_n按$C[a,b]$中的度量收敛于f. 由稠密的等价命题知，P在$C[a,b]$中稠密.

例4 设$1\leqslant p<\infty$，记$B[a,b]$是$[a,b]$上有界可测函数全体，证明：$B[a,b]$在$L^p[a,b]$上稠密.

证 对于$f\in L^p[a,b]$，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant n,\\ 0, & |f(x)|>n,\end{cases}$$

则f_n是有界可测函数，且有

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{|f|>n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

而$|f|^p\in L^1[a,b]$，则由积分的全连续性，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$e\subset[a,b]$且$m(e)<\delta$时，有

$$\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p.$$

由 $$n^p\cdot m((|f|>n))\leqslant\int_{(|f|>n)}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

有$N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时，$m((|f|>n))<\delta$，从而

$$\|f_n-f\|_p=\left(\int_{(|f|>n)}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\varepsilon,$$

即$f_n\to f$. 依稠密的等价命题知，$B[a,b]$在$L^p[a,b]$中稠密.

例5 设$1\leqslant p<\infty$，视$C[a,b]$为$L^p[a,b]$的子空间，证明：

$C[a,b]$在$L^p[a,b]$中稠密.

证 可以利用稠密的传递性(见主要内容2)来证. 由例4知,$B[a,b]$在$L^p[a,b]$中稠密,故只需证$C[a,b]$在$B[a,b]$中稠密即可.

$\forall\ f\in B[a,b]$,设$|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a,b]$. 由实变函数中的鲁金定理知,任取$\varepsilon>0$,令$\delta=(\varepsilon/2M)^p$,则存在$g\in C[a,b]$,使得

$$m(f\neq g)<\delta.$$

设$|g(x)|\leqslant M$,记$E=(f\neq g)$,则

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant(2M)^p m(E)<\varepsilon^p,$$

即$\|f-g\|_p<\varepsilon$,所以$C[a,b]$在$B[a,b]$中按$L^p[a,b]$的度量是稠密的. 若$|g(x)|>M$,只需将g换成$\max(\min(g(x),M),-M)$即可.

例6 设$C_{2\pi}$是在$[0,2\pi]$上连续且满足$f(0)=f(2\pi)$的函数f的全体,证明:$C_{2\pi}$在$L^p[0,2\pi]$ $(1\leqslant p<\infty)$中稠密.

证 由例5知,$C[0,2\pi]$在$L^p[0,2\pi]$中稠密,故只需证$C_{2\pi}$按$C[0,2\pi]$在$L^p[0,2\pi]$上稠密即可.

设$x\in C[0,2\pi]$,$\forall\ \varepsilon>0$,取$M=\max|x(t)|$,$\delta=(\varepsilon/2M)^p$,作$x_1\in C_{2\pi}$如下:

$$x_1(t)=\begin{cases}x(t), & 0\leqslant t\leqslant 2\pi-\delta,\\ x(0), & t=2\pi,\\ \text{线性}, & 2\pi-\delta\leqslant t<2\pi,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\|x-x_1\|_p&=\left(\int_0^{2\pi}|x(t)-x_1(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\&=\left(\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}|x(t)-x_1(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\&\leqslant[\delta(2M)^p]^{1/p}=\varepsilon.\end{aligned}$$

例7 设f是点集A上的连续映射,B为A的稠密子集,证明:$f(B)$在$f(A)$中稠密.

证 因为$f^{-1}(\overline{f(B)})\supset f^{-1}(f(B))\supset B$,又由$f$的连续性知$f^{-1}(\overline{f(B)})$是闭集,所以

$$f^{-1}(\overline{f(B)})\supset\overline{B}\Longrightarrow\overline{f(B)}\supset f(\overline{B}).$$

又B为A的稠密子集，由稠密的等价命题(见主要内容1)知，$\overline{B}\supset A$，所以$\overline{f(B)}\supset f(\overline{B})\supset f(A)$，从而$f(B)$在$f(A)$中稠密.

例8 证明：实直线$\mathbf{R}$与复平面C是可分的.

证 因为有理数集$\mathbf{Q}$是实直线$\mathbf{R}$的可数子集，且在$\mathbf{R}$中稠密. 依定义实直线$\mathbf{R}$是可分的.

因为，若取实部与虚部都是有理数的复数作为C的子集，则是可数的稠密子集，故依定义复平面C是可分的.

例9 证明：$C[a,b]$是可分空间.

证 取以有理数为系数的多项式全体作集P_1，则P_1为可列集. 而对任何多项式p及任意$\varepsilon>0$，存在有理系数多项式p_1，满足

$$\| p-p_1 \| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |p(x)-p_1(x)|<\varepsilon, \qquad ①$$

则由例3知，P在$C[a,b]$中稠密；式①又给出P_1在P中稠密. 则依稠密的传递性(见主要内容2)知，P_1在$C[a,b]$中稠密，从而$C[a,b]$是可分空间.

例10 证明：l^p $(1\leqslant p<\infty)$是可分空间.

证 设l^p是实的. 取M是形如$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,0,0,\cdots)$的所有实数列所成的集. n是任意正整数，y_i是有理数，则M是可列的.

$\forall\, x=(x_i)\in l^p$，有$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$. 故$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, n\in\mathbf{N}$，使得$\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p<\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p$. 由有理数的稠密性，可取得$y_i$，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p<\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p$.

令$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,0,\cdots,0)$，则$y\in M$，且

$$\| x-y \|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}$$
$$<\left[2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}<\varepsilon.$$

即M在l^p中稠密，依定义知l^p是可分空间.

例 11 证明:度量空间 X 是可分的 $\Longleftrightarrow X$ 存在一个可数子集 Y,$\forall\ \varepsilon>0$ 和 $x\in X$,$\exists\ y\in Y$,使得 $\rho(x,y)<\varepsilon$.

证 充分性 设 Y 是 X 的可数子集,又 $\rho(x,y)<\varepsilon$,则 $x\in Y$ 或是 y 聚点 $\Longrightarrow \overline{Y}=X$,故 X 是可分的.

必要性 若 X 是可分的,则必有 X 的可数稠密子集 Y. 由稠密性知,对 $x\in X$,$\exists\ y\in Y$,对 $\varepsilon>0$,有 $\rho(x,y)<\varepsilon$.

例 12 证明:$L^p[a,b]$是可分空间.

证 以 P_1 记有理系数多项式的全体,则由例 9 知,$\forall\ f\in C[a,b]$与$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ p\in P_1$,使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|^p<\varepsilon^p/(b-a)$$

则按 $L^p[a,b]$的范数,有

$$\|f-p\|^p=\int_a^b|f(x)-p(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon^p/(b-a)\cdot(b-a)=\varepsilon^p,$$

即 $\|f-p\|<\varepsilon$,说明 P_1 在 $C[a,b]$中稠密. 又例中证明了 $C[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密,从而 P_1 在 $L^p[a,b]$中稠密,由于 P_1 是可列集,故 $L^p[a,b]$是可分空间.

例 13 证明:可分的度量空间的势不超过$\aleph$.

证 若 X 为有限集,则结论自然成立,否则,设 A 为 X 的可列子集,有 $\overline{A}=X$. 考察形式元 $a_{x_1x_2\cdots}$ 全体,其中各 $x_i\in A$,记集合为 S,则 $\overline{\overline{S}}\leqslant\aleph$.

记 $S_1=\{a_{x_1x_2\cdots}\mid\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在$\}$. $\forall\ x\in X$,取 $a_{x_1x_2\cdots}\in S_1$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 对 $x\neq y$,如

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

则有 $a_{x_1x_2\cdots}\neq a_{y_1y_2\cdots}$,说明 X 对等于 S_1 的子集,故 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{S}}\leqslant\aleph$.

例 14 定义在$[a,b]$上的有界函数全体记为 $B[a,b]$,它是一个度量空间,证明:$B[a,b]$是不可分的.

证 记 A 为在 $c\in[a,b]$值为 1 在$[a,b]\setminus\{c\}$值为零的函数全体,则 A 是不可数的;且 A 中任何两个函数的距离均为 1,即知

$B[a,b]$不存在稠密的可列子集，所以$B[a,b]$是不可分的.

例 15 证明：l^∞是不可分的.

证 取l^∞中项值$x_n=0$或$x_n=1$的点的全体为集合Z，则$Z\subset l^\infty$. Z的每一$y=\{x_n\}$的二进制表示形式为$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\cdots$，所以$Z$与二进小数全体所成集对等，是不可列的.

如例14，Z中任何两个不同点间的距离均等于1. 于是，以每个y为中心，以1/3为半径作小球，则这些小球有不可数个，且互不相交. 若M是l^∞任意稠密集，则这些不相交的球的每一个必含M的一个元素，从而M是不可数的. 由此得出，l^∞的任意稠密子集都是不可数的，因此l^∞是不可分的.

例 16 设$C[0,\infty)$是$[0,\infty)$上有界连续函数全体按范数$\|x\|=\sup\limits_t|x(t)|$所成的赋范线性空间，证明：$C[0,\infty)$不是可分的.

证 只需证$C[0,\infty)$的任何子列$\{x_{\{n_k\}}\}$都是不可列的.

设$\{n_k\}$为自然数列的任一子列，作$x_{\{n_k\}}\in C[0,\infty)$如下：

$$x_{\{n_k\}}(t)=\begin{cases}1, & x=n_k+1/2,\\ 0, & x\overline{\in}\bigcup(n_k,n_{k+1}),\\ \text{线性}, & x\in(n_k,n_k+1/2)\bigcup(n_k+1/2,1),\end{cases}$$

则知集合$\{x_{\{n_k\}}\}$是不可列的，且$\{n_k\}\neq\{n_k'\}$时，$\rho(x_{\{n_k\}},x_{\{n'_k\}})=1$，故依定义$C[0,\infty)$是不可分的.

例 17 度量空间(X,ρ)中的集S称为ε-链，是指$\forall\ x,y\in S$，当$x\neq y$时，必有$\rho(x,y)\geqslant\varepsilon$. 证明：$X$为不可分的$\Longleftrightarrow\forall$ 某个$\varepsilon>0$，存在不可列的ε-链.

证 **必要性** 若$\forall\ \varepsilon>0$均不存在可列的ε-链，则至多存在有限个点，使得两点之间的距离大于ε，而其它点与这些点之一的距离小于ε，这有限个点就构成ε-网. 这样，X是完全有界的，所以是可分的.

充分性 若可列个点$\{y_k\}$在X中稠密，而$\{x_\lambda|\lambda\in A\}$是不可列

ε-链. 作以 x_λ 为心，$\varepsilon/3$ 为半径的球，则这样的球有不可列个，且每个球至少含一个 y_k，从而必有某个球同含于两个球. 设此两球中心分别为 $x_\lambda, x_{\lambda'}$，则

$$\varepsilon \leqslant \rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) \leqslant \rho(x_\lambda, y_k) + \rho(y_k, x_{\lambda'}) < 2\varepsilon/3.$$

显然导出矛盾. 从而知此时 X 必不可分.

例 18 度量空间中的单点集是否一定是疏朗集?

答 仅含一点的度量空间或离散的度量空间中，单点集均非疏朗集.

例 19 希尔伯特立方体

$$A = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \,\middle|\, |\xi_n| \leqslant \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots \right\},$$

证明：A 作为 l^2 的子集，既是闭的，又是疏朗集.

证 先证 A 是闭集. 设 $x_0 \in \overline{A}$，则必存在一列 $\{x_k\} \subset A$，有 $\rho(x_k, x_0) \to 0$. 设

$$x_k = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}, \cdots), \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(0)}|^2 \right)^{1/2} \to 0 \ (k \to \infty),$$

则对每个固定的 n，有

$$\lim_{k \to \infty} \xi_n^{(k)} = \xi_n^{(0)} \Longrightarrow |\xi_n^{(0)}| \leqslant \frac{1}{n},$$

从而 $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}, \cdots) \in A$，所以 A 是 l^2 中的闭集.

再证 A 是疏朗集. 因为 A 是闭集，故只需证 A 中不包含 l^2 中的任何开集. 用反证法，设有 $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^2$，对 $\delta > 0$ 有 $N(x_0, \delta) \subset A$，又对 $N \in \mathbf{N}$，满足 $N > 1/\delta$（即 $\delta > 1/N$），取

$$x_1 = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N-1}, \xi_N + \delta/2, \xi_{N+1}, \cdots),$$

显然有 $\rho(x_0, x_1) = \delta/2$，故 $x_0, x_1 \in N(x_0, \delta) \subset A$. 于是 $|\xi_N| \leqslant 1/N$，$|\xi_N + \delta/2| \leqslant 1/N$，从而

$$\delta/2 = |(\xi_N + \delta/2) - \xi_N| \leqslant |\xi_N + \delta/2| + |\xi_N| \leqslant 2/N.$$

由 N 的任意性知，$\delta = 0$，从而导出矛盾. 所以，A 是 l^2 中的疏朗集.

第六节　完　备　性

主要内容

1. **定义1**　设X是度量空间，$\{x_n\}$是X中的点列．如果$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得当$n,m>N$时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是$X$中的**基本点列或柯西点列**．

(1)度量空间X中的收敛点列必是基本点列．

(2)设$\{x_n\}$是度量空间X的基本点列，若$\{x_n\}$的子点列$\{x_{n_k}\}$收敛于X中点x，则$\{x_n\}$也收敛于x_0．

(3)存在这样的度量空间，其中有不收敛的基本点列．

2. **定义2**　若度量空间X中的每一个基本点列都收敛于X中的点，则称X是**完备的度量空间**，简称为**完备空间**．

完备的赋范线性空间称为**巴拿赫空间**．

3. **定理1**　设X是完备的度量空间，$Y\subset X$，则Y为完备度量子空间的充要条件是Y是X中的闭集．

4. **定理2**　设X是完备的度量空间，又设$S_n=\{x\,|\,\rho(x,x_n)\leqslant\varepsilon\}$为$X$中的一套闭球：$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$，如果球的半径$\varepsilon_n\to 0$，则必有惟一的$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$．

5. **定理3**(贝尔(Baire)定理)　完备度量空间必是第二纲的集．

6. **定义3**　设X是度量空间，若有完备的度量空间X_1，使X等距同构(见第一节疑难解析1)于X_1的稠密子空间，则称X_1是X的**完备化空间**(X_1中的点称为X的“理想点”)．

7. **定理4**　任一度量空间必存在完备化空间．

8. **定理5**　设$\widetilde{X}$，X'是度量空间X的两个完备化空间，则必有$\widetilde{X}$到X'的等距同构映射，使得对一切$x\in X$，$\varphi(x)=x$．因此，度量空间的完备化空间在等距同构意义下是惟一的．

疑难解析

1. 证明空间 X 的完备性有哪些步骤？

答 通常有以下两步：

(1)任取 X 中的一个基本点列 $\{x_n\}$，并将条件 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ 在 X 中具体化，由此构造出“极限”x；

(2)证明 $x\in X$，且 $\|x_n-x\|\to 0$.

关键是极限 x 的构造，并证明 $x\in X$. 也可以利用主要内容3，在已知包含 Y 的空间 X 是完备的条件下，证明 Y 是 X 中的闭集.

2. 度量空间的完备化有何意义？

答 一般的度量空间如果是不完备的，应用起来就有困难，例如，在不完备的空间里，方程可能无解. 完备性保证了基本点列必然收敛. 度量空间的完备化是整个数学分析学的一个重要而基本的思想方法，由有理数的柯西序列构造实数是从不完备的度量空间扩张为完备空间的典型方法，即把柯西序列作为新的点增加到原有的空间中去，得到新的完备的度量空间. 这有利于研究、解决问题.

方法、技巧与典型例题分析

要求理解度量空间完备性概念，掌握完备性的证明方法.

例1 若 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 的柯西点列，且存在一收敛的子序列 $x_{n_k}\to x\in X$，证明：$x_n\to x\quad(n\to\infty)$.

证 由题设知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $n,m>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon/2$，当 k 充分大时，有 $n_k>N$，且 $\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon/2$. 所以，当 $n>n_k$ 时，有

$$\rho(x_n,x)<\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon,$$

故 $x_n\to x$.

例 2 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是度量空间 X 的两个柯西点列，证明：$a_n=\rho(x_n,y_n)$ 收敛.

证 因为$\{x_n\}$与$\{y_n\}$均为柯西点列，故$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当$m,n>N$时，

$$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon/2,\rho(y_m,y_n)<\varepsilon/2.$$

又 $$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(x_m,y)+\rho(y,y_n),$$

$$\rho(x_m,y_m)\leqslant\rho(x_m,x_n)+\rho(x_n,y_m)+\rho(y_m,y_n).$$

综上即得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,x_n)|<\rho(x_n,x_m)+\rho(y_m,y_n)<\varepsilon.$$

从而$a_n=\rho(x_n,y_n)$是X上的柯西点列．因为X完备，所以$a_n=\rho(x_n,y_n)$收敛．

例 3 设ρ_1与ρ_2均为X上的度量，且存在$a,b>0$，使得$\forall\ x,y\in X$，有

$$a\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant b\rho_1(x,y).$$

证明：(X,ρ_1)与(X,ρ_2)中有同样的柯西点列．

证 设$\{x_n\}$是(X,ρ_1)的柯西点列，则对给定的$\varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当$n,m>N$时，$\rho_1(x_m,x_n)<\varepsilon/b$．所以，$\rho_2(x_m,x_n)\leqslant b\rho_1(x_m,x_n)<\varepsilon$．故$\{x_n\}$也是$(X,\rho_2)$的柯西点列．

又设$\{y_n\}$是(X,ρ_2)的柯西点列，则对任意$\varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当$n,m>N$时，$\rho_2(y_m,y_n)<a\varepsilon$．所以，$\rho_1(y_m,y_n)\leqslant\frac{1}{a}\rho_2(y_m,y_n)<\varepsilon$．故$\rho$也是$(X,\rho_1)$中的柯西点列．

下面的例子证明一些序列空间的完备性，请读者注意证明的步骤、方法与技巧．

例 4 证明：$\mathbf{R}^n$空间是完备的．

证 取$x^{(k)}=\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\}$，$k=1,2,\cdots$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列，则由

$$|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}|\leqslant\|x^{(k)}-x^{(l)}\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}|^2\Big)^{1/2},\quad i=1,2,\cdots,n$$

易知，对$i=1,2,\cdots,n$，$\{x_i^{(k)}\}$是基本列．利用实数的柯西准则知，存在实数x_i，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

而点
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n,$$

且
$$\| x^{(k)}-x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)}-x_i|^2 \right)^{1/2} \to 0 \quad (k\to\infty),$$

即点列$\{x^{(k)}\}$在$\mathbf{R}^n$中收敛，且收敛于x.

例5 证明：空间l^∞是完备的.

证 取$\{x_n\}$是l^∞中的基本点列，$x_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)$，$l^\infty$上的度量

$$\rho(x,y)=\sup_i |x_i-y_i|,$$

其中
$$x=\{x_i\}\in l^\infty, \quad y=\{y_i\}\in l^\infty.$$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>0$，当$m,n>N$时，有

$$\rho(x_m,x_n)=\sup_i |x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon.$$

对于每个固定的i，当$m,n>N$时，有

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon. \qquad ①$$

所以，序列$(x_i^{(1)},x_i^{(2)},\cdots)$是$C$中的基本点列，是收敛的. 即，当$m\to\infty$时，$x_i^{(m)}\to x_i\in C$，由此得$x=(x_1,x_2,\cdots)$.

在式①中，令$n\to\infty$，则当$m>N$时，$|x_i^{(m)}-x_i|<\varepsilon$. 因为$x_m=\{\xi_i^{(m)}\}\in l^\infty$，故存在实数$k_m$，对所有的$i$，满足$|x_i^{(m)}|\leqslant k_m$，从而对每个$i$有

$$|x_i|\leqslant |x_i-x_i^{(m)}|+|x_i^{(m)}|\leqslant \varepsilon+k_m,$$

即$\{x_i\}$是有界数列，$x=\{x_i\}\in l^\infty$. 又由

$$|x_i^{(m)}-x_i|\leqslant\varepsilon,$$

有
$$\rho(x_m,x)=\sup_i |x_i^{(m)}-x_i|\leqslant\varepsilon.$$

故当$m\to\infty$时，$x_i\to x$. 所以l^∞是完备的度量空间.

例6 证明：空间C是完备的，其中C是所有收敛复数列$x=(x_i)$所成的集，其度量ρ由空间l^∞导出.

证 因为l^∞是完备的，C是l^∞的子空间，所以只需证明C是闭的，即可由主要内容3确定C是完备的.

任取 $x=\{x_i\}\in\bar{C}$，则知存在 $x_n=\{x_i^{(n)}\}\in C$，使得 $x_n\to x$. 故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，对所有 i，有

$$|x_i^{(n)}-x_i|\leqslant\rho(x_n,x)<\varepsilon/3. \qquad ②$$

特别是当 $n=N$ 时，对所有 i，式②也成立. 因为 $x_N=(x_1^{(N)},x_2^{(N)},\cdots)\in C$ 是收敛序列，所以存在一个 N_1，当 $i,k>N_1$ 时，有

$$|x_i^{(N)}-x_k^{(N)}|<\varepsilon/3,$$

于是，当 $i,k>N_1$ 时，

$$|x_i-x_k|\leqslant|x_i-x_i^{(N)}|+|x_i^{(N)}-x_k^{(N)}|+|x_k^{(N)}-x_k|<\varepsilon$$

成立，即序列 $x=\{x_i\}$ 是收敛的，$x\in C$. 因为 $x\in\bar{C}$ 是任意的，所以 C 在 l^∞ 是闭的.

例7 证明：空间 l^p 是完备的，其中 p 是固定的，且 $1\leqslant p<\infty$.

证 设 $\{x_n\}$ 是 l^p 中的柯西点列，$x_n=\{x_i^{(n)}\}$. $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $m,n>N$ 时，有

$$\rho(x_m,x_n)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p}<\varepsilon. \qquad ③$$

对于每个 $i=1,2,\cdots$，当 $m,n>N$ 时，有

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon. \qquad ④$$

对于固定的 i，由式④知，$(x_i^{(1)},x_i^{(2)},\cdots)$ 是柯西点列. 因为 $\mathbf{R}$ 和 C 都是完备的，所以此点列收敛，即当 $m\to\infty$ 时，$x_i^{(m)}\to x_i$. 由此，定义 $x=(x_1,x_2,\cdots)$.

下面证明 $x\in l^p$，且 $x_m\to x$.

由式③知，当 $m,n>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p,\quad k=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$，则当 $m>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(m)}-x_i|^p\leqslant\varepsilon^p,\quad k=1,2,\cdots.$$

再令 $k\to\infty$，则当 $m>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(m)}-x_i|^p\leqslant\varepsilon^p. \qquad ⑤$$

从而知 $x_m-x\in l^p$. 因为 $x_m\in l^p$,则由闵可夫斯基不等式,有 $x=x_m+(x-x_m)\in l^p$,且由式⑤得 $\rho(x_m,x)\leqslant\varepsilon$,即 $x_m\to x\ (m\to\infty)$,从而 l^p 是完备的.

例8 设 $M\subset l^\infty$ 是由至多含有限个非零项的序列全体组成的子空间,在 M 中求一不收敛的柯西序列,并由此证明:M 是不完备的.

证 令 $x_n=(1,1/2,\cdots,1/n,0,0,\cdots)$,则点列 $\{x_n\}\in M$. 因为

$$\rho(x_m,x_n)=1/(m+1)\ (m<n),$$

所以 $\{x_n\}$ 是 M 中的柯西点列. 但

$$x_n\to x=\left\{\frac{1}{n}\right\}\in l^\infty,\ x\overline{\in}M,$$

从而 M 是不完备的.

例9 在 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 上定义度量

$$\rho(x,y)=|\arctan x-\arctan y|,\ x,y\in\mathbf{R},$$

证明:空间 $\mathbf{R}$ 是不完备的.

证 取 $x_n=n$,则点列 $\{x_n\}$ 没有极限.

对于任意正整数 m 及 $n>m>\cot\varepsilon$,有

$$\rho(m,n)=\arctan n-\arctan m=\arctan\frac{n-m}{1+mn}<\arctan\frac{1}{m}<\varepsilon,$$

所以 $\{x_n\}$ 是柯西点列. 因此,由柯西点列 $\{x_n\}$ 不收敛知,$\mathbf{R}$ 是不完备的.

类似地,取点列 $\{x_n\}=\{n\}$,可以证明对正整数全体的空间 X,定义度量 $\rho(m,n)=|1/m-1/n|$,则 X 是不完备的.

例10 证明:满足 $x(a)=x(b)$ 的 $x\in C[a,b]$ 构成的子空间 $Y\subset C[a,b]$ 是完备的.

证 任取 $x\in\overline{Y}$,则 Y 中存在序列 $\{x_n\}$,使得 $x_n\to x$,从而 $x_n(a)\to x(a)$,$x_n(b)\to x(a)$. 于是

$$0=x_n(a)-x_n(b)\to x(a)-x(b),\ x\in Y,$$

即Y是闭的，从而是完备的.

例 11 设S是所有复数列(有界或无界)组成的集，定义度量

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|},$$

其中$x=\{x_i\}$，$y=\{y_i\}$，证明：$x_n\to x$的充要条件是，对于所有的$i=1,2,\cdots$，有$x_i^{(n)}\to x$. 这里$x_n=\{x_i^{(n)}\}$.

证 必要性 设$x_n\to x$，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当$n>N$时，有

$$\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\leqslant\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2^i(1+\varepsilon)},$$

从而当$n>N$时，有$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon$.

充分性 $\forall\ \varepsilon>0$，由$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$知，存在$m$，使得$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$.
又由题设知，对于每个i，有$x_i^{(n)}\to x$，故对于满足$1<i\leqslant m$的每个i，存在N_i，当$n>N_i$时，有$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N=\max(N_1,N_2,\cdots,N_m)$，当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即$x_n\to x$.

例 12 利用上例结果证明：序列空间S是完备的.

证 设$\{x_n\}$是S中任意柯西点列，$x_n=\{x_i^{(n)}\}$，则$\forall\ \varepsilon>0$与固定的i，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当$m,n>N$时，有

$$\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|}{1+|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|}\leqslant\rho(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2^i(1+\varepsilon)},$$

所以 $|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon$.

对于固定的 i,$(x_i^{(1)},x_i^{(2)},\cdots)$ 是柯西点列,且收敛. 令 $x_i^{(n)}\to x_i$,则由例 11,$x_n\to x=\{x_i\}\in S$,所以 S 是完备的.

例 13 设 (X_1,ρ_1) 与 (X_2,ρ_2) 是两个度量空间,$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$ 上定义

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\{[\rho_1(x_1,y_1)]^p+[\rho(x_2,y_2)]^p\}^{1/p},$$

其中 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X_1\times X_2$,$p\geqslant 1$ 为正数. 证明:$X_1\times X_2$ 是完备空间的充要条件是 (X_1,ρ_1) 与 (X_2,ρ_2) 均为完备空间.

证 充分性 若 (X_1,ρ_1) 与 (X_2,ρ_2) 是完备的,设 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)})$,$\{x^{(n)}\}$ 为 $X_1\times X_2$ 中的基本列,则依定义易知,$\{x_1^{(n)}\}$,$\{x_2^{(n)}\}$ 分别是 X_1,X_2 中的基本列,从而分别收敛于 x_1,x_2. 于是

$$\rho((x_1^{(n)},x_2^{(n)}),(x_1,x_2))=[\rho_1(x_1^{(n)},x_1)^p+\rho_2(x_2^{(n)},x_2)^p]^{1/p}\to 0,$$

所以,$(X_1\times X_2,\rho)$ 是完备空间.

必要性 若 $(X_1\times X_2,\rho)$ 是完备的,设 $\{x_1^{(n)}\}$ 是 X_1 中的基本点列,任取 $x_2\in X_2$,则 $\{(x_1^{(n)},x_2)\}$ 是 $X_1\times X_2$ 中的基本点列,故必收敛于 $X_1\times X_2$ 中某点. 设极限点为 (x_1,x'_2),则由

$$\rho((x_1^{(n)},x_2),(x_1,x_2'))\to 0\ (n\to\infty)$$

可知 $$\rho_1(x_1^{(n)},x_1)\to 0\quad (n\to\infty)(\text{且 } x_2=x_2'),$$

所以 X_1 是完备空间.

类似可证 X_2 也是完备空间.

下面的例子讨论一些函数空间的完备性问题,注意与序列空间的相同与不同点.

例 14 证明:连续函数空间 $C[a,b]$ 关于度量

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,\quad x,y\in C[a,b]$$

是完备的.

证 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的柯西点列,则 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,当 $m,n>N$ 时,有

$$\rho(x_m,x_n)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|<\varepsilon,$$

从而对一切$t\in[a,b]$，有

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon,\ m,n>N,$$

从而对固定的$t\in[a,b]$，$\{x_n(t)\}$收敛. 设$x_n(t)\to x(t)(n\to\infty)$，则对一切$t\in[a,b]$，有

$$|x_n(t)-x(t)|=\lim_{m\to\infty}|x_n(t)-x_m(t)|\leqslant\varepsilon\quad(n>N),$$

所以$\{x_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于x. 因为$x_n(t)$在$[a,b]$上连续且一致收敛于$x(t)$，故$x(t)$在$[a,b]$上连续，所以$x\in C[a,b]$. 同时还证明了$x_m\to x(m\to\infty)$，从而$C[a,b]$是完备的.

若在$C[a,b]$上定义度量

$$\rho_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t,$$

$$\rho_2(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2},$$

则可以证明$(C[a,b],\rho_1)$与$(C[a,b],\rho_2)$都不是完备的度量空间，从而说明完备性是与度量有关的.

例 15 证明：$L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$是完备的空间.

证 设$\{f_n\}$是$L^p[a,b]$中的基本点列，由定义知，存在$n_k\in\mathbf{N}$，使得$m,n>n_k$时，有$\|f_n-f_m\|_p<1/2^k$. 设$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，于是

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p<1/2^k,$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(1/2^k)<\infty. \quad ⑥$$

当$p=1$时，式⑥化为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\mathrm{d}x<\infty. \quad ⑦$$

当$p>1$时，由$1\in L^q[a,b]$(其中$1/p+1/q=1$)，依赫尔德不等式，得

$$\int_a^b|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\mathrm{d}x\leqslant\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p(b-a)^{1/q}.$$

再利用式⑥知，$p>1$时，式⑦仍成立.

对式⑦应用实变函数中的列维引理,即知$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|$在$[a,b]$上几乎处处收敛. 因此级数$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]$在$[a,b]$上几乎处处收敛,即极限$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$几乎处处存在,从而存在可测函数$f$,使得$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$在$[a,b]$上几乎处处成立.

再证$f\in L^p[a,b]$. 由$\{f_n\}$是$L^p[a,b]$中的基本点列知,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,当$n,m\geqslant N$时,$|f_n-f_m|<\varepsilon$. 对于上面所选的子序列$\{f_{n_k}\}$,取充分大的k_0,使得$k_0>N$,则对$k\geqslant k_0$,$n>N$,有$\|f_n-f_{n_k}\|_p<\varepsilon$. 对函数列$\{|f_n-f_{n_k}|^p,k=1,2,\cdots\}$应用法都定理,得

$$|f_n(x)-f(x)|^p=\lim_{k\to\infty}|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^p\in L^p[a,b],$$

且
$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon^p. \quad ⑧$$

因为$f_n-f\in L^p[a,b]$,所以$f=f_n+(f-f_n)\in L^p[a,b]$. 又由式⑧知,当$n\geqslant N$时,$\|f_n-f\|_p<\varepsilon$. 即点列$\{f_n\}$按$L^p[a,b]$的度量收敛于$f$,因此$L^p[a,b]$是完备空间.

从例15可以看到:首先在序列空间需要构造出点列$\{x_n\}$的极限x,而在函数空间需要构造函数列$\{f_n\}$的极限函数f,显然后者要困难得多. 其次,在函数空间中证明极限函数属于函数空间也比序列空间中证明极限点属于序列空间要困难得多. 但是,两种空间完备性证明的基本步骤还是一致的.

例16 证明:$L^\infty[a,b]$是完备的.

证 证法与例15完全一致.

先由基本列找出极限函数. 设$\{f_n\}$是$L^\infty[a,b]$的一个基本点列,则$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,当$n,m\geqslant N$时,恒有$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$,从而知存在$[a,b]$中的一族勒贝格零集$\{E_{mn}\}$,使得

$$\|f_n-f_m\|=\sup\{f_n(x)-f_m(x)\,|\,x\in(a,b)\backslash E_{mn}\}.$$

记$E=\bigcup\limits_{mn}E_{mn}$,则$E\subset[a,b]$且为零集. 当$x\in[a,b]\backslash E$,且$m,n\geqslant N$时,有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\sup\{|f_n(x)-f_m(x)|\,|\,x\in[a,b]\backslash E\}$$
$$\leqslant\sup\{|f_n(x)-f_m(x)|\,|\,x\in[a,b]\backslash E_{mn}\}$$
$$\leqslant\|f_n-f_m\|<\varepsilon, \qquad ⑨$$

从而知，当 $x\in[a,b]\backslash E$ 时，$\{f_n(x)\}$ 是实的基本列，必收敛于某实数 $f(x)$. 任意规定 f 在 E 上的值，即为一个定义在 $[a,b]$ 上的函数 f.

再证 $f\in L^\infty[a,b]$. 显然，f 是可测函数，在式⑨中令 $m\to\infty$，则当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \qquad ⑩$$

在 $x\in[a,b]\backslash E$ 上成立，从而，$f_n-f\in L^\infty[a,b]$，即

$$f=f_n-(f_n-f)\in L^\infty[a,b].$$

由式⑩知

$$\|f_n-f\|\leqslant\sup\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,x\in[a,b]\backslash E\}\leqslant\varepsilon,$$

即 f_n 按 $L^\infty[a,b]$ 的度量收敛于 f. 故 $L^\infty[a,b]$ 是完备的.

例 17 设 (X,ρ) 是一个度量空间，证明：X 是完备度量空间 $\Longleftrightarrow$ 对 X 中任何一套闭球 $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$，其中 $B_i=\{x\,|\,\rho(x,x_i)\leqslant\varepsilon_i\}$，当 $\varepsilon_n\to0$ 时，必有惟一的 $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$.

证 充分性 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列，要证明其是收敛的. 对取定的 $\varepsilon_k=1/2^{k+1}$，必存在 n_k，使得当 $m\geqslant n_k$ 时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon_k$. 设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，作球列

$$B_k=\{x\,|\,\rho(x,x_{n_k})\leqslant1/2^k\},\quad k=1,2,\cdots,$$

于是，当 $Y\in B_{k+1}$ 时，有

$$\rho(y,x_{n_k})\leqslant\rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},y)<1/2^k,$$

所以 $B_{k+1}\subset B_k$，即 $\{B_k\}$ 是一列单调下降的闭球套. 由题设知，存在 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$，因此 $\rho(x_{n_k},x)\leqslant1/2^k$，即 $x_{n_k}\to x$，再由 $\{x_n\}$ 是基本点列，得 $x_n\to x(n\to\infty)$，从而确定 (X,ρ) 是完备的度量空间.

必要性 证明见主要内容中的定理 2.

例 18 设$[a,b]$上的连续函数序列$\{x_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于x，证明：$x(t)$在$[a,b]$上是连续的.

证 因为$\{x_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于x，所以对于每个$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$，使得对所有$t\in[a,b]$，有$|x(t)-x_N(t)|<\varepsilon/3$.

因为x_N在t_0连续，所以存在$\delta>0$，当$|t-t_0|<\delta$时，有$|x_N(t)-x_N(t_0)|<\varepsilon/3$. 从而，对于满足$|t-t_0|<\delta$的一切$t\in[a,b]$，有

$$|x(t)-x(t_0)|\leqslant|x(t)-x_N(t)|+|x_N(t)-x_N(t_0)|+|x_N(t_0)-x(t_0)|<\varepsilon,$$

即$x(t)$在任意$t_0\in[a,b]$连续，因此$x(t)$是$[a,b]$上连续函数.

例 19 设$\mathbf{R}$为实数全体，$\mathbf{Z}$是整数全体，定义度量$\rho(x,y)=|x-y|$. 证明：$\mathbf{Z}$是$(\mathbf{R},\rho)$中的第一纲集，但$(\mathbf{Z},\rho)$是第二纲的.

证 因为，对$\mathbf{R}$中任何点x，单点集$\{x\}$是闭集，其内部是空集，所以单点集是疏朗集. 而$\mathbf{Z}$是可列个单点集的并，因而是$(\mathbf{R},\rho)$中的第一纲集.

在$(\mathbf{Z},\rho)$中，任一基本点列必为本质上的常点集. 因为，对$(\mathbf{Z},\rho)$中的基本点列$\{x_n\}$，若取$\varepsilon=1/2$，则存在N，当$n,m\geqslant N$时，$|x_n-x_m|<1/2$. 由$x_n\in\mathbf{Z}$即知，$x_n=x_N$. 常点列显然是收敛的，从而，$(\mathbf{Z},\rho)$是完备的度量空间. 于是，$(\mathbf{Z},\rho)$是第二纲的.

例20 利用完备度量空间必是第二纲的集，证明：康托集是不可列的.

证 因为康托集是直线上的闭集，所以它是完备的，直线上的任何单点集是疏朗的，若康托集K是可列的，由$K=\bigcup\limits_{x\in K}\{x\}$可知，$K$被表示为可列个疏朗集之并，这与完备空间的第二纲性相矛盾，故康托集是不可列的.

例21 设X是完备的度量空间，$\{G_n\}$是X中一列稠密的开集，证明：$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$也是$X$中的稠密集.

证 用反证法证. 若$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$不是$X$中的稠密集，则$X\setminus\overline{\bigcap G_n}$是非

空开集，则必可取得一非空开球S，使得$\overline{S}\subset X\setminus\overline{\bigcap G_n}$. 因为$\overline{S}$是完备的度量空间，且 $\overline{S}=\overline{S}\setminus\bigcap G_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\overline{S}\setminus G_n)$，而 $\overline{S}\setminus G_n$ 是闭集，$\overline{S}\setminus(\overline{S}\setminus G_n)^C=\overline{S}\bigcap G_n$ 是$\overline{S}$中的稠密集，所以，$\overline{S}\setminus G_n$ 是$\overline{S}$中稠密开集的余集，从而为疏朗集. 于是，$\overline{S}$可以表为一列疏朗集的并，是与$\overline{S}$的完备性矛盾的，故$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$也是$X$中的稠密集.

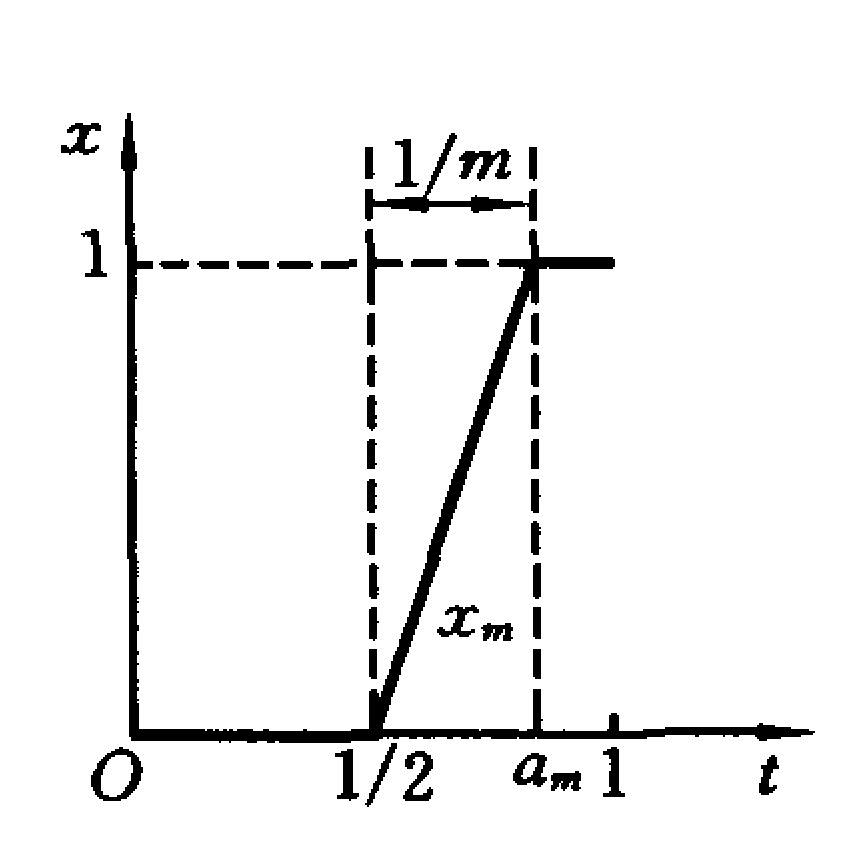
例 22 设 X 是$[0,1]$上所有实值连续函数所成的集，$\forall\ x,y\in X$，定义度量

$$\rho(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t,$$

证明：(X,ρ)是不完备的度量空间.

证 设$x_m(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1/2,\\ mt-m/2, & 1/2\leqslant t\leqslant 1/2+1/m,\\ 1, & 1/2+1/m<t\leqslant 1,\end{cases}$

$x_m\in X, m=1,2,\cdots$. $\rho(x_m,x_n)$是图1.3中三角形的面积.



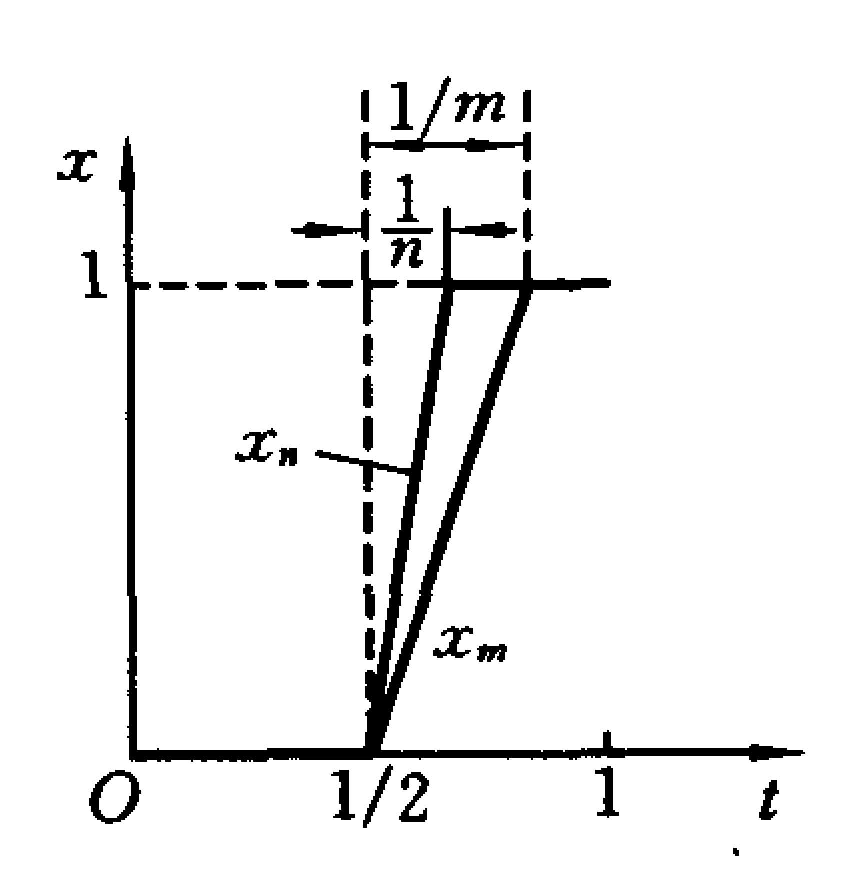


图 1.3

对于每个$\varepsilon>0$，存在$N>1/\varepsilon$，使得当$m,n>N$时，有

$$\rho(x_m,x_n)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon,$$

从而知$\{x_n\}$是X中的柯西点列.

下面证$\{x_n\}$不收敛. 若$x(t)\in X$，且$\rho(x_n,x)\to 0\ (m\to\infty)$，则

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x)&=\int_0^1|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\\&=\int_0^{1/2}|x(t)|\mathrm{d}t+\int_{1/2}^{1/2+1/m}|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\\&\quad+\int_{1/2+1/m}^{1}|1-x(t)|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因为三个积分均非负，故$\rho(x_n,x)\to 0\Longrightarrow$每个积分趋于零，则有

$$x(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1/2],\\ 1, & t\in(1/2,1],\end{cases}$$

$x(t)$显然不是连续函数，从而$\{x_n\}$在X不收敛，故X不完备.

例23 设(X,ρ)是完备的，且$\bar{\rho}=\rho/(1+\rho)$，证明：$(X,\bar{\rho})$也是完备的.

证 若$\bar{\rho}(x_m,x_n)<\varepsilon<1/2$，则

$$\rho(x_m,x_n)=\frac{\bar{\rho}(x_m,x_n)}{1-\bar{\rho}(x_m,x_n)}<2\bar{\rho}(x_m,x_n).$$

因此，若$\{x_n\}$是$(X,\bar{\rho})$中的基本点列，则$\{x_n\}$也是(X,ρ)中的基本点列，且$\{x_n\}$在(X,ρ)中的极限与在$(X,\bar{\rho})$中的极限是同一的，所以，$(X,\bar{\rho})$也是完备的.

例24 设(X,ρ)是度量空间，证明：(X,ρ)是完备空间的充要条件是对任何单调递减的闭集序列$\{A_n\}$，当$A_n\neq\varnothing$，$n=1,2,\cdots$且

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{\rho(x,y)\,|\,x,y\in A_n\}=0$$

时，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$为单点集.

证 必要性 记

$$d_n=\sup\{\rho(x,y)\,|\,x,y\in A_n\},\ \forall\ x_n\in A_n,$$

因为当$m>n$时，$x_m\in A_m\subset A_n$，所以$\rho(x_m,x_n)\leqslant d_n$，而$d_n\to 0$，故$\{x_n\}$是基本列.

设$x_n\to x\ (n\to\infty)$，因为当$m>n$时，$x_m\in A_n$，A_n是闭集，所以$x\in A_n$，$n\in\mathbf{N}$，从而$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 若又有$y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则

$$\rho(x,y)\leqslant d_n,\ n=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$，即可得 $\rho(x,y)=0$，即 $x=\theta$.

充分性　设 $\{x_n\}$ 是基本点列，对 $\varepsilon=1/2^{k+1}$，取 $n_k\in\mathbf{N}$，使得当 $m>n_k$ 时，$\rho(x_{n_k},x_m)<1/2^{k+1}$. 不妨设 $\{n_k\}$ 单调增加，作 $A_k=\{x\mid\rho(x_{n_k},x)\leqslant 1/2^k\}$，因为当 $y\in A_{k+1}$ 时，有

$$\rho(x_{n_k},y)\leqslant\rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},y)<1/2^k,$$

所以 $A_{n+1}\subset A_k$，即 $\{A_k\}$ 是一列单调减少的闭集，且其"直径"趋于零. 于是，存在 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，使得 $\rho(x_{n_k},x)\leqslant 1/2^k$，$x_{n_k}\to x\ (k\to\infty)$，从而 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.

例 25　若在赋范线性空间 X 中，任何级数的绝对收敛总能得出级数收敛，证明：X 是完备的空间.

证　在 X 中任取柯西序列 $\{S_n\}$，对于每个 k，存在 n_k，使得当 $n,m>n_k$ 时，$\|S_n-S_m\|\leqslant 1/2^k$. 对所有 k，选 $n_{k+1}>n_k$，则 $\{S_{n_k}\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子序列. 令 $x_1=S_{n_1},x_2=S_{n_2}-S_{n_1},\cdots,x_k=S_{n_k}-S_{n_{k-1}}$，则 $S_{n_k}=\sum\limits_{j=1}^{k}x_j$，且

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|\leqslant\|x_1\|+\|x_2\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\|x_1\|+\|x_2\|+1.$$

于是，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 绝对收敛，即 $S_{n_k}\to S\in X$. 因为 $\{S_n\}$ 是柯西序列，有

$$\|S_n-S_m\|\leqslant\|S_n-S_{n_k}\|+\|S_{n_k}-S\|\to 0.$$

因此，$S_n\to S$，故 X 是完备的.

第七节　不动点原理

主 要 内 容

1. 定义 1　设 X 是度量空间，T 是 X 到它自身的一个映射，若存在数 α，$0\leqslant\alpha<1$，使得对一切 $x,y\in X$，有

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y), \qquad ①$$

则称 T 是 X 上的一个**压缩映射**.

压缩映射是连续的,即对任何点列 $x_n\to x_0$,必有 $Tx_n\to Tx_0$.

若 T 是 X 到自身的一个映射,若对 $x^*\in X$,有 $Tx^*=x^*$,则称 x^* 是 X 的一个**不动点**.

2. **定理1**(巴拿赫定理) 在完备度量空间中的压缩映射必有惟一的不动点.

在定理条件下,从任一 $x_0\in X$ 开始的迭代序列收敛于惟一的不动点 x,其误差估计分别为

$$\rho(x_m,x)\leqslant\frac{a^m}{1-a}\rho(x_0,x_1)\text{ (先验估计)}, \qquad ②$$

$$\rho(x_m,x)\leqslant\frac{a}{1-a}\rho(x_{m-1},x_m)\text{ (后验估计)}. \qquad ③$$

3. **定理2** 设度量空间 X 是完备的,$y=Tx$ 是 X 到 X 的映射.如果存在 $n\in\mathrm{N}$,使得 T^nx 是 X 上的一个压缩映射,则映射 T 在 X 中必有惟一的不动点.(T 表示 $x\mapsto Tx$,T^2x 表示 $x\mapsto TTx$,$\cdots$.)

4. **定理3** 设 $f(s)$ 为 $a\leqslant s\leqslant b$ 上的连续函数,$K(s,t)$ 为正方形 $a\leqslant s\leqslant b,a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,且有常数 M,使得

$$\int_a^b|K(s,t)|\mathrm{d}t\leqslant M<\infty\quad(a\leqslant s\leqslant b),$$

则当 $|\lambda|<1/M$ 时,必有惟一的 $\varphi\in C[a,b]$ 适合方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^bK(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

5. **定理4** 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,$K(x,y)$ 是三角形 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant x\}$ 上的连续函数,且设 $|K(x,y)|\leqslant M$,则对任何常数 λ,方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^xK(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上有惟一的连续函数解 $\varphi(x)$.

疑难解析

1. 怎样理解不动点与压缩映射原理?

答 对于一个由集合X到自身的映射T,如果存在点$x^* \in X$,使得$Tx^* = x^*$,则称x^*为映射T的不动点.

一个映射的不动点可以有多个,也可以是惟一的. 在代数方程、微分方程与积分方程等方程的讨论中,确定方程解的存在性、惟一性及近似解的收敛性是十分重要的. 在一些具体方程的讨论过程中往往把方程的解转化为某些映射的不动点. 因此,研究映射的不动点就十分必要了.

巴拿赫在1922年提出的压缩映射定理,是一个比较简单的判定不动点是否存在与惟一的基本方法,它指出:完备距离空间中的压缩映射必有惟一的不动点. 在这里,空间X的完备性保证了映射的不动点存在,而不动点的惟一性则直接从映射的压缩性得来,与空间的完备性无关.

压缩映射原理同时给出了求不动点的迭代法(逐次逼近法),在完备的度量空间中,从任意选取的一点x_0出发,逐次作点列$x_{n+1} = Tx_n, n=1,2,\cdots$,它必然逼近于要求的方程$Tx=x$的解.

2. 怎样应用压缩映射原理证明方程解的存在与惟一性?

答 应用压缩映射原理的关键是找到适当的度量空间,并在此空间上定义适当的映射,使得该映射的不动点与方程的解相一致. 这样,当空间是完备的、映射是压缩的时候,就可以应用压缩映射原理.

方法、技巧与典型例题分析

要求理解压缩映射原理,能判别映射是压缩映射,掌握应用压缩映射原理讨论方程解的存在与惟一性的方法.

例1 令$Tx = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x, x \in \mathbf{R}$,证明:$T$是$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$的映

射.

证 设$x,y\in\mathbf{R}$,则

$$Tx-Ty=x-y-(\arctan x-\arctan y).$$

由微分中值定理知,存在x,y之间的值ξ,使得

$$Tx-Ty=x-y-\frac{x-y}{1+\xi^2}=(x-y)\frac{\xi^2}{1+\xi^2},$$

故 $$|Tx-Ty|<|x-y|\Rightarrow\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y).$$

若有$Tx=x$,则$\arctan x=\frac{\pi}{2}$,显然无解,即映射T不存在不动点.

例2 设$X=[1,+\infty)$,$T:X\to X$,$Tx=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$,证明:$T$是压缩映射.

证 因为

$$\rho(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{xy}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right||x-y|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|x-y|=\frac{1}{2}\rho(x,y),$$

所以T是压缩映射.

例3 设有线性方程组$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$,其中$\boldsymbol{C}=(c_{ij})$是$n\times n$方阵,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$是未知向量,证明:若矩阵$\boldsymbol{C}$满足$\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}|<1$,$i=1,2,\cdots,n$,则方程$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$有惟一解.

证 设X是$\mathbf{R}^n$(或$\mathbf{C}^n$),定义度量

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|,$$

则(X,ρ)是完备的度量空间(证略).

作映射$T:X\to X$,$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{x}\in X$.

若 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in X$,

则 $$\rho(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j+b_i\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_j+b_i\right)\right|$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}||x_j-y_j|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$=a\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

而 $a=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}|<1$，所以 T 是 X 上的压缩映射，存在惟一的 $\boldsymbol{x}^*\in\mathbf{R}^n$，使得 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{b}$.

例如，对线性方程组

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6 & -1/6 & 1/5\\1/6 & 1/5 & 1/2\\-1/6 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^{3}|c_{1j}|=1/6+1/6+1/5,\quad \sum_{j=2}^{3}|c_{2j}|=1/6+1/5+1/2,$$

$$\sum_{j=1}^{3}|c_{3j}|=1/6+1/3+1/3,\quad \max_{1\leqslant i\leqslant 3}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|=13/15,$$

所以
$$\rho(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})\leqslant\frac{13}{15}\rho(x,y)$$
方程组有惟一解.

为求近似解，先取 $\boldsymbol{x}_0=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_1=T\boldsymbol{x}_0=(4,-1,2)^{\mathrm{T}}$，…，有

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=T\boldsymbol{x}_n=\begin{pmatrix}1/6 & -1/6 & 1/5\\1/6 & 1/5 & 1/2\\-1/6 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_n+\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix},$$

即得一列收敛于 $\boldsymbol{x}^*$ 的近似解. 由于

$$\rho(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})=\max(|4-0|,|-1-0|,|2-0|)=4,$$

可以由 $\rho(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_n)\leqslant\dfrac{a^n}{1-a}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0)$ 求得误差估计为

$$\rho(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}^*)\leqslant\frac{(13/15)^n}{1-13/15}\rho(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1)=30\times\left(\frac{13}{15}\right)^n.$$

例 4 设 (X,ρ) 为一度量空间，当 $x\neq y$ 时，$T:X\to X$ 满足 $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$，且 T 有一不动点，证明：不动点是惟一的.

证 若 x,y 是 X 的两个不动点，且 $x\neq y$，则

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$$

是不可能的，故不动点必是惟一的.

例5 (1)设T为压缩映射，证明：$T^n(n\in\mathbf{N})$仍为压缩映射；

(2)若$n>1$，T^n为一压缩映射，证明：T不一定为压缩映射.

证 (1)设T是压缩映射，则有$0\leqslant\alpha<1$，使得$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$，从而

$$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y),\quad 0\leqslant\alpha^n<1,$$

所以，T^n为压缩映射.

(2)设$T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$为$(x_1,x_2)\mapsto(x_2,0)$，不是压缩映射，但是$T^2:(x_1,x_2)\mapsto(0,0)$是压缩映射.

例6 设$\{a_{ij}\}(i,j=1,2,\cdots,n)$是一组实数，满足$\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})^2<1$，其中$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$证明：代数方程组$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$对任何一组$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$必有惟一解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

证 考察映射$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$为$n$维实欧几里德空间，且

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1\,n}\\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n\,n-1} & 1-a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

于是，对于$x,y\in\mathbf{R}^n$，有

$$\begin{aligned}[\rho(Tx,Ty)]^2&=\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}(\delta_{jk}-a_{jk})(x_k-y_k)\Big]^2\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\delta_{jk}-a_{jk})^2\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\\&=\sum_{j,k}(\delta_{jk}-a_{jk})^2[\rho(x,y)]^2.\end{aligned}$$

从而知T是$\mathbf{R}^n$上的压缩映射，必有惟一的不动点，即为原方程的解.

例7 验证方程$x^3+4x-2=0$在$[0,1]$上有实根，并用迭代法求出方程在$[0,1]$上的近似解.

解 找出一个映射，验证其为压缩映射.

由 $x^3+4x-2=0$，得出 $x=\frac{1}{4}(2-x^3)$. 作映射 $T:[0,1]\to[0,1]$，$Tx=\frac{1}{4}(2-x^3)$，则 $\forall\ x,y\in[0,1]$，恒有

$$|Tx-Ty|=\frac{1}{4}|x^3-y^3|=\frac{1}{4}|x-y||x^2+xy+y^2|\leqslant\frac{3}{4}|x-y|,$$

从而知 T 为压缩映射. 而 $[0,1]$ 是完备空间，所以存在惟一不动点. 即存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $T\xi=\xi$，故 ξ 是方程 $x^3+4x-2=0$ 在 $[0,1]$ 上的惟一解.

令 $x_0=0$，取 $x_1=Tx_0=\frac{1}{2},\cdots,x_{n+1}=Tx_n=\frac{1}{4}(2-x_n^3)$，得解的近似值. 有误差估计

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{(3/4)^n}{1-3/4}|x_1-x_0|=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

例 8（隐函数存在定理） 设函数 $f(x,y)$ 在条形域 $a\leqslant x\leqslant b$，$-\infty<y<\infty$ 上处处连续，且处处有偏导数 $f'_y(x,y)$，且存在常数 $m\leqslant M$，使得在条形域中有

$$0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M, \qquad ①$$

证明：方程 $f(x,y)=0$ 在 $[a,b]$ 上必有惟一连续解 $y=\varphi(x)$.

证 在完备空间 $C[a,b]$ 上作映射 T，即

$$T\varphi=\varphi-\frac{1}{M}f(x,\varphi),$$

T 是 $C[a,b]$ 到自身的压缩映射. 由于

$$\begin{aligned}
&|(T\varphi_2)(x)-(T\varphi_1)(x)|\\
&=\left|\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_2)-\varphi_1(x)+\frac{1}{M}f(x,\varphi_1)\right|\\
&=\Big|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f'_y[x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))]\\
&\quad\cdot(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\Big|\\
&\leqslant\left(1-\frac{m}{M}\right)|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,
\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant\frac{m}{M}\leqslant1$，记 $\alpha=1-\frac{m}{M}$，则 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，即有

$$|T\varphi_2-T\varphi_1|\leqslant\alpha|\varphi_2-\varphi_1|,$$

所以，T 是 $C[a,b]$ 上的压缩映射. 从而，存在惟一的 $\varphi\in C[a,b]$，使得 $f(x,\varphi(x))=0$.

例 9 设 $k(t,\tau)$ 在方形域 $S=\{(t,\tau)\mid a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant\tau\leqslant b\}$ 上连续，且 $\max\limits_{(t,\tau)\in S}|k(t,\tau)|<C$，$v$ 是 $[a,b]$ 上连续函数. 若参数 μ 满足 $|\mu|<1/[(b-a)\cdot C]$，证明：方程

$$x(t)=\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau=v(t),\ t\in[a,b] \qquad ②$$

有惟一解 $x\in C[a,b]$.

证 令 $X=C[a,b]$，设映射

$$(Tx)(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,\ x\in C[a,b],$$

则 $Tx\in C[a,b]$，所以 T 为 X 上的映射，且

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=\max_{t\in[a,b]}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\\&\leqslant|\mu|\max_{t\in[a,b]}\int_a^b|k(t,\tau)||x(\tau)-y(\tau)|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant|\mu|C\int_a^b\rho(x,y)\mathrm{d}\tau\\&=|\mu|C(b-a)\rho(x,y)=\alpha\rho(x,y),\end{aligned}$$

而 $\alpha=|\mu|C(b-a)<1$，故 T 为压缩映射. 因为 $C[a,b]$ 是完备的，所以方程②有惟一不动点，使得

$$\bar{x}(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)\bar{x}(\tau)\mathrm{d}\tau,\ t\in[a,b],$$

$\bar{x}$ 即为方程②的惟一解.

例 10 设 $v\in C[a,b]$，$K(t,\tau)$ 是三角域 $\{(t,\tau)\mid a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant\tau<t\}$ 上的连续函数，且 $|K(t,\tau)|\leqslant M$，证明：对于任何常数 λ，方程

$$x(t)=v(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad ③$$

在 $[a,b]$ 上有惟一的连续函数解 $x(t)$.

证 定义从$C[a,b]$到$C[a,b]$的映射T为

$$Tx(t)=v(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

由于三角域为有界闭域，所以$K(t,\tau)$为三角域上有界函数，故存在$M>0$，使得$|K(t,\tau)|\leqslant M$.

$\forall\ x(t),y(t)\in C[a,b]$，当$t\in[a,b]$时，有

$$\begin{aligned}|Tx(t)-Ty(t)|&=\left|\lambda\int_a^t K(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant|\lambda|\int_a^t|K(t,\tau)||x(\tau)-y(\tau)|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant|\lambda|M(t-a)\rho(x-y).\end{aligned}$$

可以用数学归纳法证明

$$|T^nx(t)-T^ny(t)|\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(t-a)^n}{n!}\rho(x,y).\qquad④$$

$n=1$已证，设式④对n成立，则对$n+1$，有

$$\begin{aligned}|T^{n+1}x(t)-T^{n+1}y(t)|&=\left|\lambda\int_a^t K(t,\tau)[T^nx(\tau)-T^ny(\tau)]\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant\frac{|\lambda|^nM^{n+1}}{n!}\left|\lambda\int_a^t(\tau-a)^n\mathrm{d}\tau\rho(x,y)\right|\\&=\frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\rho(x,y).\end{aligned}$$

令
$$\alpha_n=|\mu|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}<1,$$
则
$$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha_n\rho(x,y).$$

$\forall\ \mu>0$，当n充分大时，有$\alpha_n<1$，从而T^n在$C[a,b]$上为压缩映射，故T在$C[a,b]$上有惟一的不动点$x(t)$，即$x(t)$是积分方程③在$[a,b]$上的惟一连续解.

例 11 设$K(x,\tau)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<t,\\ t, & t\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$求方程

$$\varphi(x)-\frac{1}{10}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=1$$

的近似连续解，使其误差不超过10^{-4}.

解 因为$K(x,t)$在方形域$[0,1]\times[0,1]$上连续，作$C[0,1]\to C[0,1]$的映射T，使

$$T\varphi(x)=1+\frac{1}{10}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

对于$\varphi,\psi\in C[0,1]$，有

$$\begin{aligned}\| T\varphi(x)-T\psi(x)\| &=\frac{1}{10}\left|\int_0^1 K(x,t)(\varphi(t)-\psi(t))\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\frac{1}{10}\max_x\left|\int_0^1 K(x,t)\mathrm{d}t\,\|\varphi-\psi\|\right|.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 K(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\mathrm{d}t+\int_x^1 x\mathrm{d}t=x-\frac{x^2}{2}\leqslant\frac{1}{2}$, $x\in[0,1]$,

所以 $$\| T\varphi-T\psi\|\leqslant\frac{1}{20}\|\varphi-\psi\|.$$

可知$\alpha=\frac{1}{20}<1$，故T有惟一不动点.

取$\varphi_0=0,\varphi_n=T^n\varphi_0$，则误差为

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\varphi_1-\varphi_0\|=\frac{(1/20)^n}{1-1/20}\times 1,$$

要$\frac{(1/20)^n}{1-1/20}<10^{-4}$，则$n=4$. 于是

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_1=1,\quad \varphi_2=1+\frac{1}{10}\left(x-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varphi_3=1+\frac{1}{10}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{10^2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right),$$

$$\begin{aligned}\varphi_4&=1+\frac{1}{10}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{10^2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)\\ &\quad+\frac{1}{10^3}\left(\frac{2x}{15}-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^6}{720}\right)\\ &=1+\frac{194}{1875}x-\frac{x^2}{20}+\frac{x^4}{2400}+\frac{x^5}{120000}-\frac{x^6}{720000}.\end{aligned}$$

例 12 对于微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\qquad ⑤$$

若$f(t,x)$在矩形域$A=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leqslant a,|x-x_0|\leqslant b\}$上连续，且

在 A 上关于 x 满足李普希兹条件，即存在 $k>0$，使得

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant k|x-y|,\ (t,x)\text{及}(t,y)\in A.$$

证明：初值问题⑤有惟一解 $x(t)$，$t\in[t_0-\beta,t_0+\beta]$，其中

$$\beta<\min\left[a,\frac{b}{M},\frac{1}{k}\right],\quad M=\max_{(t,x)\in A}|f(t,x)|.$$

证 记 $C[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 为 $[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 上所有实值连续函数全体. $\forall\ x,y\in C[t_0-\beta,t_0+\beta]$，定义度量

$$\rho(x,y)=\max_{t_0-\beta\leqslant t\leqslant t_0+\beta}|x(t)-y(t)|,$$

则 $C[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 是完备度量空间. 设 $\mu>0$ 为一常数，令

$$B=\{x\in C[t_0-\beta,t_0+\beta]\,|\,\rho(x,x_0)\leqslant M\beta\},$$

其中 x_0 表示 $[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 中恒等于 x_0 的函数，则 B 为闭集，是完备度量空间.

将初值问题⑤用等价的积分方程表示为

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,\ x\in C[t_0-\beta,t_0+\beta],\qquad ⑥$$

定义 $T:B\to B$ 为

$$(Tx)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,\ x\in B.$$

$\forall\ x\in B$，由于 $|x(\tau)-x_0|\leqslant M\beta<b$，所以 $f(\tau,x(\tau))$ 有定义. 又由 $f(t,x)$ 连续，从而 Tx 在 $[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 上连续，且 $(Tx)(t_0)=x_0$，

$$|(Tx)(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(\tau,x(\tau))|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant M|t_0-t|\leqslant M\beta,$$

即 $\rho(Tx,x_0)\leqslant M\beta\Longrightarrow Tx\in B$，所以 T 为 B 到自身的映射.

$\forall\ x_1,x_2\in B$，由于 f 满足李普希兹条件，故

$$\begin{aligned}|(Tx_2)(t)-(Tx_1)(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}[f(\tau,x_2(\tau))-f(\tau,x_1(\tau))]\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant k\left|\int_{t_0}^{t}|x_2(\tau)-x_1(\tau)|\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant k|t-t_0|\rho(x_2,x_1)\leqslant k\beta\rho(x_2,x_1),\end{aligned}$$

从而 $$\rho(Tx_2,Tx_1)\leqslant k\beta\rho(x_2,x_1).$$

由题设 $\beta<1/k$，所以 $\alpha=k\beta<1$，T 是 B 上的压缩映射，故 T 存在惟一不动点 $x\in B$. 此 x 是积分方程⑥的惟一解，也是微分方程⑤的惟一解. 设

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x_n(\tau))\mathrm{d}\tau,\ n=0,1,2,\cdots,$$

则解 x 是 $\{x_n\}$ 在 $C[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 中的极限.

例 13 (1)将初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 写成积分方程形式，说明它是哪一类方程.

(2)证明：二阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0,x'(t_0)=x_1\end{cases}$$

可转换成一个伏特拉(Volterra)方程.

解 (1)如例 12，微分方程可以写成

$$\int_{t_0}^{t}x'(t)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

即 $$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

它是伏特拉积分方程.

(2)对方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f(t,x)$ 两边积分两次，并代入初始条件，得

$$x(t)=x_0+(t-t_0)x_1+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau}f(u,x(u))\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau,$$

对 $\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau}f(u,x(u))\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau$ 用分部积分，得

$$\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau}f(u,x(u))\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

即 $$x(t)=x_0+(t-t_0)x_1+\int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

它是伏特拉积分方程.

例 14 设$\sup_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$，证明：无穷代数方程组 $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i, i=1,2,\cdots$，对于任意序列$b=(b_1,b_2,\cdots)\in l^1$，必有惟一的解 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1$.

证 作映射$T: l^1 \to l^1$，则对于

$$x=(x_1,x_2,\cdots),$$

有
$$Tx=((Tx)_1,(Tx)_2,\cdots),$$

其中
$$(Tx)_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j+b_i, \quad i=1,2,\cdots.$$

对于$x,y\in l^1, x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)$，有

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\| &= \sum_i |(Tx)_i-(Ty)_i| = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}(x_j-y_j)\Big| \\ &\leqslant \sup_i \sum_j |a_{ij}| \sum_j |x_j-y_j| \\ &= \sup_i \sum_j |a_{ij}| \cdot \|x-y\|.\end{aligned}$$

因为$\alpha=\sup_i \sum_j |a_{ij}|<1$，故$T$是$l^1$上的压缩映射，从而有惟一的不动点，也是原方程组的惟一解.

例 15 设X是完备的度量空间，映射$T: X\to X$满足：在开球$N(x_0,r)$ $(r>0)$内适合$\rho(Tx,Ty)<k\rho(x,y)$，$0<k<1$，且T在闭球$V(x_0,r)=\{x\mid \rho(x,x_0)\leqslant r\}$上连续，$\rho(x_0,Tx_0)\leqslant k(1-k)r$. 证明：$T$在开球$N(x_0,r)$内存在惟一的不动点.

证 由题设条件知，若T有不动点，则不动点必是惟一的. 下证不动点的存在性.

考察以x_0为初始点的迭代序列$\{T^n x_0\}$，则

$$\rho(x_0,Tx_0)\leqslant k(1-k)r<kr,$$

知$Tx_0\in N(x_0,r)$. 又

$$\rho(x_0,T^2x_0)\leqslant \rho(x_0,Tx_0)+\rho(Tx_0,T^2x_0)\leqslant (1+k)\rho(x_0,Tx_0)$$

$$\leqslant (1+k)(1-k)kr < kr,$$

知 $T^2 x_0 \in N(x_0, r)$. 反复继续上述步骤，可得

$$\rho(x_0, T^n x_0) \leqslant (1+k+\cdots+k^{n-1})k(1-k)r = (1-k^n)kr < kr,$$

从而 $T^n x_0 \in N(x_0, r)$，即

$$\{T^n x_0\} \subset N(x_0, r) \subset V(x_0, r).$$

所以 $\{T^n x_0\}$ 是一个基本点列，收敛于 X 中的点 x^*，而 $x^* \in V(x_0, r)$，故 x^* 是 T 的不动点.

由误差估计式 $\rho(x^*, x_0) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)$ 可得

$$\rho(x^*, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k}\rho(Tx_0, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k}(1-k)kr = kr < r,$$

所以 $x^* \in N(x_0, r)$.

例 16 设 $f(t,x)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在矩形域

$$R = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

上连续，证明：f 在 R 上关于 x 满足李普希兹条件.

证 利用微分中值定理，有

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |x_2 - x_1|.$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上连续，故在闭域 R 上 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $\forall\ (x,y) \in R$，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M$，从而可知，$f$ 在 R 上关于 x 满足李普希兹条件.

例 17 设 F 是 n 维欧几里德空间中的有界闭集，T 是 F 到自身的映射，且满足：$\forall\ x, y \in F$，当 $x \neq y$ 时，必有 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$，证明：映射 T 在 F 中必有惟一的不动点.

证 此例是例 4 的特例.

任取 $x_0 \in F$，作 $x_1 = Tx_0$，$x_n = T^n x_0$，则由题设可知，$\{\rho(x_n, x_{n+1})\}$ 是一单调递减有下界序列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x_{n+1})$ 存在. 又 F 是有界闭集，所以 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 不妨设 $x_{n_k} \to x^*$，则 $Tx_{n_k} \to Tx^*$，

$$\rho(x^*,Tx^*)=\lim_{k\to\infty}\rho(x_{n_k},Tx_{n_k})=\lim_{k\to\infty}\rho(Tx_{n_k},T(Tx_{n_k}))$$
$$=\rho(Tx^*,T^2x^*),$$
从而可知$Tx^*=x^*$.

若$x'=x^*$,$Tx'=x'$,则
$$\rho(x^*,x')=\rho(Tx^*,Tx')<\rho(x^*,x').$$
但这是不可能的,从而T在F中不动点惟一.

例 18 证明:在数学分析中,迭代$x_n=g(x_{n-1})$收敛的一个充分条件是$g(x)$有连续导数,且
$$|g'(x)|\leqslant a<1.$$

证 由数学分析中拉格朗日中值定理
$$|g(x)-g(y)|=|g'(\xi)||x-y|\leqslant a|x-y|$$
知,g是$\mathbf{R}$上的一个压缩映射. 依照压缩映射原理,知迭代$x_n=g(x_{n-1})$收敛.

例 19 已知方程$f(x)=0$,要求其逼近数值解,可将方程变换为$x=g(x)$的形式,选一初始值x_0并计算$x_n=g(x_{n-1})$,$n=1,2,\cdots$. 设g在某区间$J=[x_0-r,x_0+r]$上有连续导数,并在J上满足
$$|g'(x)|\leqslant a<1,\quad |g(x_0)-x_0|<(1-a)r,$$
证明:$x=g(x)$有惟一解,且迭代序列$\{x_n\}$收敛于此解,其误差估计分别为
$$|x-x_m|<a^mr\ (先验),\quad |x-x_m|\leqslant\frac{a}{1-a}|x_m-x_{m-1}|\ (后验).$$

证 由拉格朗日中值定理
$$|g(x)-g(y)|=|g'(\xi)||x-y|\leqslant a|x,y|,$$
其中ξ在x,y之间,又$|g(x_0)-x_0|<(1-a)r$. 由例20知,g在J上有惟一不动点x,即$x=g(x)$是方程的解,且迭代序列$\{x_n\}$收敛于此解. 由主要内容2中误差估计式②、③得
$$\rho(x,x_m)\leqslant\frac{a^m}{1-a}\rho(x_0,x_1)<a^mr\Longrightarrow|x-x_m|<a^mr,$$
$$|x-x_m|\leqslant\frac{a}{1-a}|x_m-x_{m-1}|.$$

例20 设T是从完备度量空间$X=(X,\rho)$到其自身的映射. $Y=\{x|\rho(x,x_0)\leqslant r\}$是$X$中一个闭球,若$T$在$Y$上满足$\rho(Tx,Ty)\leqslant a\rho(x,y)$,$0<a<1$,且$\rho(x_0,Tx_0)<(1-a)r$成立. 证明:迭代序列

$$x_0,\ x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1=T^2x_0,\ \cdots,\ x_n=T^nx_0,\cdots$$

收敛于T在Y中的惟一不动点$x\in Y$.

证 只需证明T将Y映射到Y即可.

由题设知,$\forall\ y_1,y_2\in Y$,有

$$\rho(Ty_1,Ty_2)\leqslant a\rho(y_1,y_2),\ 0\leqslant a<1.$$

又由$\rho(x_0,Tx_0)<(1-a)r$,则$\forall\ y\in Y$,有

$$\rho(x_0,Ty)\leqslant\rho(x_0,Tx_0)+\rho(Tx_0,Ty)<(1-a)r+a\rho(x_0,y)$$
$$\leqslant(1-a)r+ar=r.$$

故$Ty\in Y$,即T将Y映至Y. 由X的完备性与Y是闭的知,Y是完备的,从而依压缩映射原理,命题得证.

例21 设$f(x)$为实值函数,且在$[a,b]$上具有二阶连续导数,$\bar{x}$是$f(x)$在(a,b)上的单零点. 证明:用下面牛顿方法定义的迭代

$$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

在$\bar{x}$的某邻域内为一压缩映射.

证 由题设$f(\bar{x})=0$,则依微分中值定理,有

$$|f(x)|=|f(x)-f(\bar{x})|=|f'(\xi)||x-\bar{x}|\leqslant k_1|x-\bar{x}|.$$

因为$\bar{x}$是$f(x)$的单零点,故存在$\bar{x}$的某闭邻域$N_1\subset(a,b)$,使得$f'(x)\neq0$,且$f''(x)$连续. 因此,$f''(x)/[f'(x)]^2$在N_1上有界. 于是,$\forall\ x\in N_1$,有

$$|g'(x)|=\frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2}\leqslant k_2|f(x)|\leqslant k_1k_2|x-\bar{x}|.$$

当$|x-\bar{x}|<1/(2k_1k_2)$时,$|g'(x)|<1/2$. 令

$$N_2=\{x||x-\bar{x}|<1/(2k_1k_2)\},\quad N=N_1\cap N_2,$$

可得出,g在$\bar{x}$的某一邻域内为一压缩映射.

第八节　致密集与紧性

主要内容

1. 定义1　设X是度量空间，A是X的子集. 若A中的任何点列必有在X中收敛的子点列，则称A是（X中的）**致密集**（或**列紧集**）. 若X自身是致密集，则称X是**致密空间**.

致密集有以下性质：

(1)有限点集是致密集；

(2)有限个致密集的和集是致密集；

(3)致密集的任何子集是致密集，因而任何一族致密集的交集是致密集；

(4)致密集的闭包是致密集；

(5)致密集中的基本点列必然收敛.

定理1　n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$中的有界集必是致密集.

2. 定义2　设A是度量空间X中的点集，B是A的子集. 若存在$\varepsilon>0$，使得以B中各点为心的ε-开球全体覆盖A：$\bigcup\limits_{x\in B}O(x,\varepsilon)\supset A$，则称$B$是$A$的一个**$\varepsilon$-网**.

若$\forall\ \varepsilon>0$，点集A总有有限的ε-网$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\subset X$，则称$A$是**完全有界集**.

定理2（毫斯道夫(Hausdorff)定理）　度量空间中的致密集A必是完全有界集. 在完备空间中完全有界集是致密的.

致密集是有界集.

推论　度量空间中一个点集A是完全有界集的充分必要条件是：A中任何一个点列必含有基本的子序列.

定理3　设X是度量空间，若在X中的每个完全有界集都是致密集，则X必然是完备的.

定理4　完全有界集是可分的，即其中含有有限的或可列的稠

密子集.

3. **定义3** 设E是$a\leqslant x\leqslant b$上的一族连续函数，$E\subset C[a,b]$，若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得$\forall\ x,x'\in[a,b]$，当$|x-x'|<\delta$时，对$E$中每个函数都成立$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$，则称$E$是**等度连续的函数族**.

定理5 $C[a,b]$中有界的等度连续函数族必是致密集.

定理6 $C[a,b]$中的致密集必是等度连续的有界集.

定理7 空间l^p中的集E成为致密集的充要条件是E为有界集，且$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ n_\varepsilon\in\mathbf{N}$，使得对一切$x=\{x_k\}\in E$，成立$\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_k|^p<\varepsilon$.

4. 度量空间中的致密闭集称为**紧集**.

致密的度量空间又称为**紧空间**.

定理8 设A是度量空间X中的紧集，$\mathscr{F}$是X中的一族开集. 若$\mathscr{F}$覆盖A：$\bigcup\limits_{O\in\mathscr{F}}O\supset A$，则必有$\mathscr{F}$中的有限个开集$O_1,O_2,\cdots,O_n$覆盖$A$：$\bigcup\limits_{k=1}^{n}O_k\supset A$.

定理8又称**有限覆盖定理**.

定理9 设A是度量空间X中的点集，如果X中每个覆盖A的开集族中必有有限个开集覆盖A，则A是紧集.

紧集具有主要内容1中致密集的性质(1)至性质(4).

5. **定理10** 设D是紧集，f是D上的连续映射，则D的像$E=f(D)$也是紧集.

度量空间X上的连续映射必然把致密集映射成致密集.

度量空间X中的紧集D上的连续函数f必然有界，而且上、下确界可达到.

紧集上的一对一的连续映射必是拓扑映射.

6. **定理11** 设X_n是n维的赋范线性空间，$e_1,e_2,\cdots,e_n$是X_n的一个基，则必有正数c_1,c_2，使得对X_n中的每个元$x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k$，成立

$$c_2\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\Big)^{1/2}\leqslant\|x\|\leqslant c_2\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\Big)^{1/2},$$

且映射 $f:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to\sum_{k=1}^{n}x_ke_k$ 是 n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 到 X_n 的拓扑映射.

推论 设在有限维线性空间 X_n 上定义了两个范数 $\|\psi\|$ 和 $\|\psi\|_1$，则必有常数 $M>0$ 及 $K>0$，使得对于任何一点 $\psi\in X_n$，成立

$$K\|\psi\|\leqslant\|\psi\|_1\leqslant M\|\psi\|.$$

定义 4 设 X 是一线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是在 X 上定义的两个范数. 若存在正数 c_1 和 c_2，使得对每一点 $x\in X$，有

$$c_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2,$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

推论 有限维赋范线性空间是完备的.

推论 任意赋范线性空间的有限维线性子空间是闭子空间.

定理12 有限维赋范线性空间中任何有界集是致密的.（任何有界闭集都是紧集.）

引理（黎斯（Riesz）引理） 设 A 是赋范线性空间 X 的闭子空间，且 $A\neq X$，则 $\forall\ \varepsilon>0\ (\varepsilon<1)$，必存在 X 中的单位向量 x_0，$\|x_0\|=1$，使得

$$\rho(x_0,A)=\inf_{x\in A}\rho(x_0,x)>\varepsilon.$$

定理 13 若赋范线性空间 X 是无限维的，则 X 必有不致密的有界集.

定理14 赋范线性空间是有限维的充要条件是它的任一有界闭子集都是紧集.

疑难解析

1. 紧集与相对紧集有什么不同？

答 相对紧集即主要内容 1 中所述致密集（或列紧集）. 若 A 是度量空间 X 的一个子集，A 的闭包 $\overline{A}$ 是 X 中的一个紧集，则 A 称为 X 的相对紧集. 从而可知：

紧集一定是闭集，一定是相对紧集；

相对紧集不是闭集时，不是紧集.

紧集与相对紧集有许多相同的性质（见主要内容1中致密集的性质(1)至性质(4)），也有一些不同的性质（如性质(5)）.

在完备的度量空间中，相对紧性可利用集合的完全有界来确定，即：度量空间 X 中的相对紧集必是完全有界的，X 中的完全有界集 A 必是相对紧集.

而度量空间 X 的子集 A 是紧集的充要条件是：A 的每一个开覆盖均有有限子覆盖.

2. 怎样理解等度连续概念？

答 读者在理解等度连续概念时，要注意不要与数学分析中函数的一致连续相混淆，尽管它们定义的形式有些相似.

数学分析中的一致连续是对一个函数而言的. 对定义在 I 上的函数 f，若 $\forall\ \varepsilon>0$，则 $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall\ x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称函数 f 在 I 上一致连续.

泛函分析中的等度连续是对一族函数而言的. 设 E 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的一族连续函数，$E\subset C[a,b]$，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall\ x',x''\in[a,b]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，对 E 中每个函数 f 都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称 E 是等度连续的函数族. 注意，这里的 f 指 E 中的每个函数，而不是其中的一个函数，“等度”反映了 E 中各个函数的连续程度是同等的.

有了等度连续条件，可以帮助我们判别连续函数空间的致密性. 如阿尔赞拉-阿斯考利(Arzela-Ascoli)定理指出：$C[a,b]$ 中点集 A 是致密集（相对紧集）的充要条件是 A 为有界集且为等度连续的函数族.

方法、技巧与典型例题分析

本节着重要理解完全有界集、相对紧集（致密集）、紧集的概念，能够判定某些具体点集是否完全有界集、相对紧集、紧集.

例 1 设$X=l^2$,若$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots,0)$,$A=\{e_n|n\geqslant 1\}$,证明:$A$不是紧集.

证 对于任何$m\neq n$,有$\|e_m-e_n\|=\sqrt{2}$. 若取$B_n=O(e_n,1/2)$,则$\{B_n,n\geqslant 1\}$是A的开覆盖,但其中不包含任何有限子覆盖A.

虽然A是l^2中的有界集,且A中不存在柯西点列,故A又是闭集. 但是,事实说明有界闭集不一定是紧集.

例 2 说明下列空间不是紧空间.

(1)$\mathbf{R}^n$; (2)C^n; (3)离散度量空间.

解 只需举出一不满足条件的实例即可.

在题(1)、(2)中,集合$\{n\}$是$\mathbf{R}^n$和C^n的子集,但没有任何收敛的子列,故不是紧空间.

在题(3)中,X中存在无穷序列$\{x_n\}$,当$x_n\neq x_m$ $(n\neq m)$时,$\rho(x_n,x_m)=1$,所以$\{x_n\}$不可能有收敛的子列,故不是紧空间.

例 3 证明:$\mathbf{R}^n$中点集A是相对紧集的充要条件是A为有界集.

证 主要内容2中的定理2已经给出:任何度量空间中的相对紧集必是有界集.

下证充分性. 设A是$\mathbf{R}^n$中的有界集,任取A中一个点集$\{x_n\}$,证明$\{x_n\}$含有收敛的子点列$\{x_{n_k}\}$,$x_{n_k}\to x$,且$x\in A$.

用反证法证. 设$\{x_n\}$无子序列收敛于A中的元,则$\forall\ x\in A$,$\exists\ r_x>0$和$n_x\in\mathbf{N}$,使得$O(x,r)\cap\{x_n,n>n_x\}=\varnothing$. 因为$\bigcup_{x\in A}O(x,r_x)\supset A$,则由紧性定义,存在有限多个元$x'_1,x'_2,\cdots,x'_k$,使得$\bigcup_{i=1}^{k}O(x'_i,r_{x'_i})\supset A$. 但当$m\geqslant\max\{n_{x'_1},n_{x'_2},\cdots,n_{x'_k}\}$时,$O(x'_i,r_{x'_i})\cap\{x_n,n\geqslant m\}=\varnothing$,从而

$$\{x_n,n\geqslant m\}=A\cap\{x_n,n\geqslant m\}\subset\bigcup_{i=1}^{k}O(x'_i,r_{x'_i})\cap\{x_n,n\geqslant m\}=\varnothing,$$

推出矛盾.

例4 证明：空间$L^p[0,1]$ $(1<p<\infty)$中的集合A是相对紧集的充要条件是满足下列两个条件：

(1) 存在常数K，使得$\forall\ x\in A$，有$\|x\|\leqslant K$，即$\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K^p$；

(2) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$0<h<\delta$时，有$\|x-x_h\|<\varepsilon$，即$\left(\int_0^1 |x_h(t)-x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}<\varepsilon$，对一切$x\in A$成立.

证 **充分性** 对每个固定的h，考察$A_h=\{x_h|h\in A\}$. 因为$A_h\subset C[0,1]$，则由条件(1)，有

$$\begin{aligned}|x_h(t)| &\leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_{t-h}^{t+h}\mathrm{d}s\right)^{1/q}\\ &=\left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}\\ &\leqslant\left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p}\left(\int_0^1|x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}\leqslant\left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p}K,\end{aligned}$$

从而知A_h是有界的. 再由条件(1)，当$0\leqslant t<t'\leqslant 1$时，有

$$\begin{aligned}|x_h(t')-x_h(t)| &= \frac{1}{2h}\left|\int_{t'-h}^{t'+h}x(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t+h}x(s)\mathrm{d}s\right|\\ &=\frac{1}{2h}\left|\int_{t+h}^{t'+h}x(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t'-h}x(s)\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2h}\left(\int_{t+h}^{t'+h}|x(s)|\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t'-h}|x(s)|\mathrm{d}s\right)\\ &\leqslant\frac{1}{2h}\cdot 2(t'-t)^{1/q}\left(\int_0^1|x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}\\ &\leqslant\frac{K}{h}(t'-t)^{1/q},\end{aligned}$$

故A_h又是等度连续的. 由主要内容3中的定理知，$C[a,b]$中有界的等度连续函数族必是致密集，从而A_h是$C[0,1]$中的相对紧集. 由于$C[0,1]$中的收敛点列按$L^p[0,1]$的度量也是收敛的，故A_h也是$L^p[0,1]$中的相对紧集.

由条件(2)，$\forall\ \varepsilon>0$，可取h，使得对一切$x\in A$有$\rho(x,x_h)<\varepsilon/3$成立. 由上面证明知，对取定的$h$，$A_h$完全有界. 设$\{x_h^{(1)},x_h^{(2)},\cdots,x_h^{(k)}\}$

是A_h的$\frac{\varepsilon}{3}$-网．因为，$\forall\ x\in A$，有$x_h\in A$，所以可取到v，$1\leqslant v\leqslant k$，使得$\rho(x_h,x_h^{(k)})<\varepsilon/3$，即$\{x_h^{(1)},x_h^{(2)},\cdots,x_h^{(k)}\}$是$A$的有限$\varepsilon$-网．于是

$$\rho(x,x^{(v)})\leqslant\rho(x,x_h)+\rho(x_h,x_h^{(v)})+\rho(x_h^{(v)},x^{(v)})\leqslant\varepsilon,$$

故A是完全有界的，从而是相对紧的．

必要性　由A的相对紧性可知A是有界的，即条件(1)是必要的．

因为A是相对紧的，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 有限的$\frac{\varepsilon}{3}$-网B．从而对每个$x\in L^p[0,1]$，存在连续函数φ，使得φ与x在$L^p[0,1]$的度量意义下任意接近，且可取得$\varphi(0)=\varphi(1)=0$，使得φ可以连续地延拓到$[0,1]$之外，而在$[0,1]$外函数值处处为零．于是，设B即为此连续函数组成，即$B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，x_k均为连续函数，故当$h\to0$时，有

$$(x_k)_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x_k(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}x_k(t+s)\mathrm{d}s$$
$$=x_k(t+\theta h)\to x_k(t)\quad(0\leqslant|\theta|<1),$$

$\forall\ t\in[0,1]$，$k=1,2,\cdots,n$一致成立．

这样，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$0<h<\delta$时，$\rho((x_k)_h,x_k)<\varepsilon/3$，$k=1,2,\cdots,n$.

再$\forall\ x\in A$，取$x_k\in B$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，使得$\rho(x,x_k)<\varepsilon/3$，从而当$0<h<\delta$时，有

$$\rho(x_0,x)<\rho(x_0,(x_k)_h)+\rho((x_k)_h,x_k)+\rho(x_k,x)$$
$$\leqslant2\rho(x_k,x)+\rho((x_k)_h,x_k)<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

所以条件(2)也是必要的．

例5　证明：序列空间X中的无穷子集A为紧集的必要条件是：存在数$v_1,v_2,\cdots$，使得对于所有的$x=\{\xi_k(x)\}\in A$，有$|\xi_k(x)|\leqslant v_k$.

证　用反证法证．设条件不成立，则存在一个K_0，对于每个

$n\in\mathbf{N}$，有 $x_n\in A$，使得 $|\xi_{k_0}(x_n)|>n$.

因为，由 $x_{n_j}\to x\Longrightarrow\xi_{k_0}(x_{n_j})\to\xi_{k_0}(x)$，且 $|\xi_{k_0}(x_{n_j})|>n_j$，从而 $\{x_n\}$ 不可能有收敛的子序列. 这与 A 的紧性相矛盾.

例 6 设 (X,ρ) 是度量空间，证明：X 为紧空间的充要条件是：对 X 中的任意一族闭集 $\{F_\lambda|\lambda\in A\}$，若其中任意有限个 F_λ 的交集都为非空集，则 $\bigcap\limits_{\lambda\in A}F_\lambda$ 也必为非空集.

证 必要性 设 (X,ρ) 为紧集的度量空间，如果 $\{F_\lambda|\lambda\in A\}$ 是 X 中的一族闭集，且其中任意有限个 F_λ 的交集非空，要证 $\bigcap\limits_{\lambda\in A}F_\lambda$ 也非空.

用反证法证. 设 $\bigcap\limits_{\lambda\in A}F_\lambda=\varnothing$，则

$$X=X\backslash\bigcap_{\lambda\in A}F_\lambda=\bigcup_{\lambda\in A}(X\backslash F_\lambda).$$

由于 $X\backslash F_\lambda$ 是开集，则上式说明 $\{X\backslash F_\lambda|\lambda\in A\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由 X 是紧空间知，存在有限的子覆盖，使得 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{m}(X\backslash F_{\lambda_i})$，从而

$$\varnothing=X\backslash\bigcup_{i=1}^{m}(X\backslash F_{\lambda_i})=\bigcap_{i=1}^{m}F_{\lambda_i}.$$

这与题设任意有限个 F_λ 的交集非空矛盾，故 $\bigcap\limits_{\lambda\in A}F_\lambda$ 也非空.

充分性 设 $\{G_\lambda|\lambda\in A\}$ 是覆盖 X 的一个开集族，要证其中有限个 G_λ 覆盖了 X.

设 $X=\bigcup\limits_{\lambda\in A}G_\lambda$，则 $\varnothing=X\backslash\bigcup\limits_{\lambda\in A}(X\backslash G_\lambda)$. 因为 $\{X\backslash G_\lambda|\lambda\in A\}$ 是 X 中的一族闭集，则由题设，必有 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X\backslash G_{\lambda_i})=\varnothing$，于是

$$X=X\backslash\bigcap_{i=1}^{n}(X\backslash G_{\lambda_i})=\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i},$$

即 X 的任何开覆盖必有有限个子覆盖，从而 X 是紧集.

例 7 设 X 是离散度量空间，$A\subset X$. 证明：A 为紧集 $\Longleftrightarrow A$ 为有限点集.

证 充分性 设 A 为有限点集，则 A 必为紧集.

必要性 用反证法证. 设 A 为无限集，则必有可列子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，且其中元各不相同. 当 $m\neq n$ 时，$\rho(x_m,x_n)=1$，从而

$\{x_n\}$无收敛子列，这与 A 的紧性矛盾，故 A 必为有限集.

例 8 设 X 是紧度量空间，$\{A_n\}$为 X 中一列非空闭集，且 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，证明：$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.

证 任取 $a_n \in A_n$，则$\{a_n\} \subset A_1$，所以必有收敛子列. 设子列$\{a_{n_k}\}$收敛于 a.

$\forall\, n \in \mathbf{N}$，$\exists\, K$，使得 $k>K$ 时，$n_k>n$，则当 $k>K$ 时，$a_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_n$，从而 $a \in A_n \Rightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，即 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.

例 9 设 $X=[0,1] \cup \{2,3,\cdots\}$，$\rho(x,y)=|x-y|$，其中 $x,y \in X$，判断：(1)X 是否完备；(2)X 是否可分；(3)X 是否完全有界；(4)X 是否紧空间.

解 (1)X 是完备的. 因为$[0,1]$和$\{2,3,\cdots\}$分别是$\mathbf{R}^1$ 的两个闭子空间，故 X 在 $\mathbf{R}^1$ 中是闭的，而 $\mathbf{R}^1$ 是完备的，所以 X 是完备的.

(2)X 是可分的，因为$[0,1]$中的有理点全体与$\{2,3,\cdots\}$的并在 X 中稠密.

(3)X 不是完全有界的，因为完全有界集必须有界，显然 X 无界.

(4)X 不是紧的，因为紧集必须是完全有界的，但由题(3)知 X 不是完全有界的.

例 10 证明：$L^2[0,1]$中的集合

$$A=\{f \mid f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2n\pi x, \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \leqslant 1\}$$

是紧集.

证 对 $f \in A$，有

$$\|f\|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

设 $$\{f_k\} \subset A, f_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \sin 2n\pi x,$$

取$\{f_k\}$的一列子列如下：

$\{f_{k_i}\}$，使得$\{a_{k_{i1}}\}$是收敛数列；$\{f_{k_{ij}}\}$，使得$\{a_{k_{ij2}}\}$是收敛数列；….

记
$$g_1=f_{k_i},g_2=f_{k_{ij}},\cdots,$$
并记
$$g_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{k_n}\sin 2n\pi x,$$
则
$$\| g_p-g_r \|^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}(b_{p_n}-b_{r_n})^2+2\sum_{n\geqslant N}\frac{1}{n^2}.$$
因此$\lim\limits_{p,r\to\infty}\| g_p-g_r\|=0$. 由于$L^2[0,1]$完备，故可取$g\in L^2[0,1]$，使得
$$\| g_p-g \|\to 0\ (p\to\infty).$$
再设
$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2n\pi x,\quad b_n=\lim_{p\to\infty}b_{p_n}.$$
从而对任何N，有
$$\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{N}n|b_{p_n}|\leqslant 1,$$
得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|b_n|\leqslant 1$，即$g\in A$，故$A$是紧的.

例 11 设X为赋范线性空间，A是X中的有界集，证明：A是完全有界集$\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 有限维空间$X_\varepsilon\subset X$，使A中每个点与X_ε的距离都小于ε.

证 必要性 设A是完全有界集，则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in A$，使得$\bigcup\limits_{i=1}^{n}N(x_i,\varepsilon)\supset A$. 记$X_\varepsilon=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则$X_\varepsilon$是有限维空间，且当$x\in A$时，有
$$\rho(x,X_\varepsilon)\leqslant\min_i(x,x_i)<\varepsilon.$$

充分性 设$\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 有限维空间$X_{\varepsilon/2}\subset X$，使得$x\in A$时，$\rho(x,X_{\varepsilon/2})<\varepsilon/2$. 则取
$$B=\{y\mid y\in X_{\varepsilon/2},\text{存在}\,x\in A,\rho(x,y)<\varepsilon/2\}.$$
因为A有界，所以B是$X_{\varepsilon/2}$中的有界集，故是相对紧集.

设$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset B$是$B$的$\dfrac{\varepsilon}{2}$-网，要证它也是$A$的$\varepsilon$-网.

因为$\forall\ x\in A$，必有$y\in X_{\varepsilon/2}$，使得$\rho(x,y)<\varepsilon/2$，故$y\in B$. 于是，存在$1\leqslant i\leqslant n$，使得$\rho(y,y_i)<\varepsilon/2$，从而

$$\rho(x,y_i)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,y_i)<\varepsilon,$$

故A是完全有界集.

例12 设A是度量空间X的子集，证明：A是完全有界集$\Longleftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$和$B\subset A$，当B中任何两点的距离均不小于ε时，B必为有限集.

证 必要性 设A是完全有界集，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 有限个点a_1，$a_2,\cdots,a_k$，使得$A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}N(a_i,\varepsilon/2)$. 当$B$中点多于$k$个时，则至少在某个$N(x_i,\varepsilon/2)$内含有$B$中两个点，这两点的距离必小于$\varepsilon$.

充分性 设$\forall\ \varepsilon>0$和$B\subset A$，B中任何两点相距不小于ε，则B必为有限集. 设$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，即$\forall\ \varepsilon>0$，可取到有限集B，使得$\forall\ x\in A$，$\exists\ b_i\in B$，有$\rho(x,b_i)<\varepsilon$. 也就是B为A的有限ε-网，从而A是完全有界的.

例13 设X是度量空间，若X中的每个完全有界集都是相对紧集，证明：X是完备度量空间.

证 设$\{x_n\}$是X的一个基本点列，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当$m,n\geqslant N$时，$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$. 这时，$\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$构成$\{x_n\}$的有限$\varepsilon$-网，从而$X$是完全有界的.

由题设知，$\{x_n\}$又是相对紧集，存在收敛子列，而有收敛子列的基本列必然收敛，从而知X是完备度量空间.

例14 设X,Y是两个度量空间，映射$f:X\to Y$，证明：f是连续映射$\Longleftrightarrow$对X中任何紧集A，$f|_A:A\to Y$是连续的.

证 必要性是显然的.

充分性 设点列$\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x_0\in X$，记$A=\{x_n\,|\,n=0,1,2,\cdots\}$，则$A$中任何点列必有收敛于$x_0$的子列，故$A$是$X$中的紧集. 由题设知，$f|_A:A\to Y$是连续的，即$f(x_n)\to f(x_0)$. 说明对任何$x_n\to x_0$，均有$f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$，从而$f:X\to Y$是连续的.

例15 设X是紧度量空间，$\{f_n\}$是X上的一列实值连续函数．若$\{f_n\}$单调，且f_n在X上点点收敛于连续函数f，证明：$\{f_n\}$在X上一致收敛于f．

证 设$\{f_n\}$满足题设条件，作

$$A_n=\{x \mid f_n(x)-f(x)\geqslant\varepsilon\},\quad n=1,2,\cdots,$$

因为f_n-f是X上连续函数，所以A_n是闭集．设$\{f_n\}$单调减少，则$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$．又由$\{f_n\}$点点收敛于$f$，易知$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$．

因为X是紧度量空间，由例6知，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得$\bigcap\limits_{n=1}^{N}A_n=\varnothing$．记$A_N=\bigcap\limits_{n=1}^{N}A_n$，即$A_N=A_{N+1}=\cdots=\varnothing$，从而当$n>N$时，$f_n(x)-f(x)<\varepsilon$对一切$x\in X$都成立，所以$\{f_n\}$在$X$上一致收敛于$f$．

$\{f_n\}$单调增加时可类似证明．

例16 设X,Y均为度量空间，$f:X\to Y$是单射，证明：f是连续映射的充要条件是f把X中的任一紧集映为Y中的紧集．

证 连续映射必然将紧集映为紧集，故必要性是显然的．

充分性 设有单射将X中任一紧集映为Y中的紧集，若$\{x_n\}$是由互不相同的点组成的点列，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$且$x_0\neq x_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$．因为$\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$是紧集，由题设知，$\{f(x_0),f(x_1),f(x_2),\cdots\}$也是紧集，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)\in\{f(x_n)\mid n=0,1,2,\cdots\}.$$

用反证法证$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$．设$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_k)$，$k\neq0$，而$\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots\}$仍是紧的，则$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_{k-1})$，$f(x_{k+1}),\cdots$也是紧的，故

$$f(x_k)\in\{f(x_n)\mid n=0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots\}.$$

这与f是单射的假设矛盾，从而必有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$．

由上述证明知，若$\{x_n\}$是一列点，且$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，则$\{f(x_n)\}$的任何子列必有收敛子列，其极限为$f(x_0)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$

$=f(x_0)$，即 f 在点 x_0 处连续.

例 17 设 X,Y 是度量空间，X 是紧的，$T:X\to Y$ 是连续的双射，证明：T 是一同胚(如果一个连续的双射 $T:X\to Y$，其逆映射是连续的，则称 T 是一个同胚).

证 设 M 是 X 的任意闭子集，则由 X 的紧性知，M 也是紧的. 又由连续映射定理，$T(M)$ 是紧集，又 M 是 X 中的有界闭集，则由第二节例 8 可知，T^{-1} 是连续的，故 T 是一同胚.

例 18 设 X 是度量空间，M 是 X 的紧子集，$T:M\to\mathbf{R}$ 是连续映射，则 T 在 M 上有最小值和最大值.

证 由连续映射定理知，$T(M)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集. 又由紧性定理知，$T(M)$ 是有界闭集. 因此，$\inf T(M)$、$\sup T(M)$ 存在，且 $\inf T(M)\in T(M)$，$\sup T(M)\in T(M)$，即存在 $x_1\in M$，使得 $\inf T(M)=Tx_1$，存在 $x_2\in M$，使得 $\sup T(M)=Tx_2$，从而得 Tx 在 M 内 x_1,x_2 处分别取得最小值和最大值.

例 19 设 (X_1,ρ_1) 是度量空间，(X_2,ρ_2) 是紧度量空间. 在 $X_1\times X_2$ 上规定

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max(\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2))$$

又设 f 是 X_1 到 X_2 的映射. 证明：f 是连续映射 $\Leftrightarrow G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in X_1\}$ 是 $(X_1\times X_2,\rho)$ 中的闭集.

证 必要性 设 $f:X_1\to X_2$ 是连续映射，$\forall\ (x_0,y_0)\in\overline{G(f)}$，取一列 $(x_n,f(x_n))\in G(f)$，使得 $\rho(x_n,f(x_n)),(x_0,y_0))\to 0\ (n\to\infty)$. 因为 X_2 是紧的，$\{f(x_n)\}$ 是 X_2 中点列，故必有收敛子列，设 $f(x_{n_k})\to y_1$. 由于 $(x_{n_k},f(x_{n_k}))\to(x_0,y_0)\,(k\to\infty)$，故 $x_{n_k}\to x_0$，$y_1=y_0$. 又由 f 的连续性，必有 $y_0=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$，从而 $(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0))\in G(f)$，所以 $G(f)$ 是 $X_1\times X_2$ 中的闭集.

充分性 设 $G(f)$ 是 $X_1\times X_2$ 中的闭集，$\{x_n\}\subset X_1$，且 $x_n\to x_0\in X_1\ (n\to\infty)$. 由 X_2 是紧空间知，$\{f(x_n)\}$ 必有收敛子列 $\{f(x_{n_k})\}\to y_0$，于是 $(x_{n_k},f(x_{n_k}))\to(x_0,y_0)\,(k\to\infty)$. 又由于 $G(f)$ 是闭的，故

$(x_0, y_0) \in G(f)$，即 $y_0 = f(x_0)$. 因此，$\{f(x_n)\}$的任何收敛子列均收敛于 y_0. 又$\{f(x_n)\}$的任何子列均有收敛子列，故$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 = f(x_0)$，即 f 在 X_1 中任一点 x_0 是连续的.

例20 设(X, ρ)为紧度量空间. 若$f: X \to X$ 是没有不动点的连续映射，证明：存在常数$K>0$，使得$\rho(x, f(x)) \geqslant K$ 对一切$x \in X$同时成立.

证 作X 上的映射$T: x \to \rho(x, f(x))$. 由f 的连续性知，T 是连续的；又由 X 的紧性知，T 能达到最小值. 不妨设$K = \inf\{Tx \mid x \in X\}$，显然，$K>0$ 的充要条件是f 没有不动点.

例21 设M 是$L^2[a,b]$的一个子集，证明：M 是相对紧集的充要条件是

(1)平均一致有界，即存在常数C，使得

$$\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant C, \quad x \in M;$$

(2)平均等度连续，即$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当$|h|<\delta$ 时，有

$$\int_a^b |x(t+h)-x(t)|^2 \mathrm{d}t < \varepsilon, \quad x \in M,$$

其中 ，$t \overline{\in} [a,b]$时，$x(t)=0$.

证 必要性 设M 是相对紧集，又是$L^2[a,b]$的子集，依定理2，M 必是有界集.

因为M 相对紧，则$\forall\ \varepsilon>0$. 取M 的$\frac{\varepsilon}{3}$-网 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，再取$\delta>0$，使得当$|h|<\delta$ 时，有

$$\left(\int_a^b |x_i(t+h)-x_i(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

$\forall\ x \in M$，取$1 \leqslant i \leqslant n$，使得$\|x-x_i\| < \sqrt{\varepsilon}/3$，故

$$\left(\int_a^b |x(t+h)-x(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |x(t+h)-x_i(t+h)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |x_i(t+h)-x_i(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$+\left(\int_a^b |x_i(t)-x(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} < \sqrt{\varepsilon},$$

即平均等度连续.

充分性　利用例4 的结论，对于$h>0$，记$x_h(t)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{t-h}^{t+h} x(t)\mathrm{d}t$. 设$M$满足题设条件，则

$$\begin{aligned}\int_a^b |x_h(t)-x(t)|^2 \mathrm{d}t &= \int_a^b \left|\frac{1}{2h}\int_{-h}^h (x(t+\tau)-x(t))\mathrm{d}\tau\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{4h^2}\int_a^b\left(\int_{-h}^h |x(t+\tau)-x(t)|\mathrm{d}\tau\right)^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2h}\int_a^b\int_{-h}^h |x(t+\tau)-x(t)|^2 \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^h\left(\int_a^b |x(t+\tau)-x(t)|^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau < \varepsilon^2,\end{aligned}$$

即$\rho(x_h,x)<\varepsilon$，故M是相对紧的.

例22　设M是$L^2(-\infty,\infty)$的子集，证明：M是相对紧集的充要条件是：

(1)平均一致有界，即存在常数C，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant C,\ \ x\in M;$$

(2)平均等度连续，即$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当$|h|>\delta$时，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t+h)-x(t)|^2 \mathrm{d}t < \varepsilon,\ \ x\in M;$$

(3)$\forall\ \varepsilon>0$，存在数A，使得

$$\int_A^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{-A} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \varepsilon.$$

证　必要性　条件(1)、(2)的证法同例20. $\forall\ \varepsilon>0$，取M的$\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$-网$x_1,x_2,\cdots,x_n$和$A>0$，使得

$$\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty}\right) |x_i(t)|^2 \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4},\ \ i=1,2,\cdots,n,$$

则$\forall\ x\in M$. 可取x_i，使得$\|x-x_i\|<\sqrt{\varepsilon}/2$，于是

$$\left[\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{\infty}\right)|x(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}$$
$$\leqslant \|x-x_1\|+\left[\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{\infty}\right)|x_i(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}<\sqrt{\varepsilon},$$
即条件(3)是必要的.

充分性　设条件(1)、(2)满足. $\forall\ \varepsilon>0$，取满足条件(3)中的 A，并记 $M_A=\{f_{x[-A,A)}\mid f\in M\}$，则 M_A 是 M 的 $\sqrt{\varepsilon}$-网. 由条件(1)、(2)及例 20 的结论，M_A 是相对紧的.

因为度量空间相对紧的充要条件是 $\forall\ \varepsilon>0$ 存在相对紧的 ε-网，所以由 M_A 相对紧即可得出 M 是相对紧的.

例23　设 $C(T)$ 是紧度量空间 T 上复值连续函数全体，$\forall\ x\in C(T)$，$\|x\|=\max\limits_{t\in T}|x(t)|$，$M\subset C(T)$，证明：$M$ 是 $C(T)$ 中相对紧集的充要条件是

(1)存在常数 C，使得 $\forall\ x\in M$，有 $\|x\|\leqslant C$；

(2) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得 $\forall\ x\in M$，当 $\rho(t_1,t_2)<\delta$ 时，有
$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

证　必要性　设 M 是相对紧的，所以 M 是有界的，即条件(1)是必要的.

$\forall\ \varepsilon>0$，必有 M 的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 因为连续，所以有 $\delta_V>0$ $(V=1,2,\cdots,k)$，使得当 $\rho(t,t')<\delta_V$ 时，有 $|x(t)-x(t')|<\varepsilon/3$，$V=1,2,\cdots,k$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}$，则 $\forall\ x\in M$，只要 t,t' 满足 $|t-t'|<\delta$，就有 $|x(t)-x(t')|<\varepsilon$.

因为对于 $x\in M$，存在 $1\leqslant V\leqslant k$，使得 $\rho(x,x_V)<\varepsilon/3$，所以
$$|x(t_1)-x(t_2)|$$
$$\leqslant|x(t_1)-x_V(t_1)|+|x_V(t_1)-x_V(t_2)|+|x_V(t_2)-x_V(t_2)|<\varepsilon,$$
即条件(2)(等度连续)是必要的.

充分性　设 M 满足条件(1)、(2)，则由 $C(T)$ 的完备性，只需证 M 完全有界.

$\forall\ \varepsilon>0$，由条件(2)，存在 $\delta>0$，使得对 $\rho(t_1,t_2)<\delta$ 时，有

$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon/3$. 再利用$C(T)$的紧性，用有限个半径为$\delta$的小球覆盖$M$，从而证得$M$是相对紧集.

例 24 设(X_1,ρ_1)是度量空间，(X_2,ρ_2)是紧度量空间，在$X_1\times X_2$上定义

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max(\rho(x_1,y_1),\rho(x_2,y_2)),$$

又设f是X_1到X_2的映射，证明：f是连续映射的充要条件是：$G_f=\{(x,f(x))|x\in X_1\}$是$(X_1\times X_2,\rho)$中的闭集.

证 必要性 因为映射$f:X_1\to X_2$连续，所以，可对任何$(x_0,y_0)\overline{\in}\overline{G_f}$取点列$(x_n,f(x_n))\in G_f$，使得$\rho((x,f(x_n)),(x_0,y_0))\to 0\ (n\to\infty)$. 因为$\{f(x_n)\}$是$X_2$中的一点列，而$X_2$是紧的，从而存在收敛子列. 不妨设$f(x_{n_k})\to y_1$. 因为$(x_{n_k},f(x_{n_k}))\to(x_0,y_0)\ (k\to\infty)$，所以$x_{n_k}\to x_0, y_1\to y_0$由于$f$是连续的，从而有

$$y_0=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0).$$

于是得出 $$(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0))\in G_f,$$

即G_f是$(X_1\times X_2,e)$中闭集.

例25 证明：序列空间S中的无穷子集M为紧的必要条件是：存在数$v_1,v_2,\cdots$，使得对于所有$x=\{\xi_k(x)\}\in M$，有$|\xi_k(x)|\leqslant v_k$.

证 设条件不成立，则必存在一个k_0，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有$x_n\in M$，使得$|\xi_{k_0}(x)|>n$.

因为$x_{n_j}\to x\Longrightarrow\xi_{k_0}(x_{n_j})\to\xi_{k_0}(x)$，而$|\xi_{k_0}(x_{n_j})|>n_j$，所以$\{x_n\}$不可能有收敛子列，与$M$紧矛盾.

可以证明，这也是M为紧的充分条件.

第二章　线性有界算子

第一节　线性算子与线性泛函

主要内容

1. **定义1**　设A是实数域或复数域，X,Y是域A上的两个线性空间，D是X的线性子空间，T是D到Y中的一个映射，若$\forall\ x,y\in D$及数$\alpha,\beta\in A$，有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称T是**线性算子**，D是T的定义域，记做$D(T)$，也记做$\mathscr{D}(T)$. 集合$TD=\{Tx\mid x\in D\}$称为T的**值域**，记做$R(T)$，也记做$\mathscr{R}(T)$. 当$R(T)\subset A$，称T为实的(或复的)**线性泛函**.

2. **定理1**　设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子. 若T在某一点$x_0\in D(T)$连续，则在$D(T)$上处处连续.

定义2　若算子T将其定义域中的每个有界集映射成一个有界集，就称T是**有界算子**. 不是有界的算子称为**无界算子**.

定理2　设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子，则下述命题等价：

(1)T是有界线性算子；

(2)存在常数$M\geqslant 0$，使得$\forall\ x\in X$有$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$；

(3)T是连续的线性算子.

3. 设X,Y是两个赋范线性空间，T是$X\to Y$的有界线性算子，则称

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为算子T的**范数**.

有界线性算子的范数是有界的.

对于有界线性算子T,有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\|, \quad x \in X,$$

且
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.$$

4. 线性算子T有界$\Longleftrightarrow T$是连续算子.

定理3 设X是赋范线性空间,f是X上线性泛函,则f是连续的充要条件是f的零空间$M=\{x \mid f(x)=0\}$为X的闭子空间.

5. **定理4** 设X,Y是赋范线性空间,$B(X \to Y)$是X到Y的有界线性算子全体,则$B(X \to Y)$按通常的线性运算及算子范数成为赋范线性空间.

定义3 设X是赋范线性空间,将X上的连续线性泛函的全体记为X^*,X^*按通常的线性运算及泛函的范数构成一个赋范线性空间,称为X的**共轭空间**.

6. **定理5** 设X是赋范线性空间,Y是巴拿赫空间,则$B(X \to Y)$是巴拿赫空间.

定理6 赋范线性空间的共轭空间是巴拿赫空间.

7. 设X是赋范线性空间,又是代数. 如果其中元素的乘积满足$\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$,则称$X$是**赋范代数**. 完备的赋范代数称为**巴拿赫代数**.

定理7 当X是巴拿赫空间时,$B(X \to Y)$是巴拿赫代数.

定理8 设X是巴拿赫空间,$A \in B(X \to X)$,则$B(X \to X)$中一切可与A交换的算子全体记为U_A,U_A是$B(X \to X)$的子代数.

定理9 设$T \in B(X \to X)$,则极限

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n > 1} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

疑难解析

怎样理解线性算子概念？

答 数学分析中研究的**R**（或**R**子集）上的实值函数，是从它的定义域到**R**中的映射. 在泛函分析中，把向量空间到向量空间的映射称为算子，而线性算子是保留了向量空间两种代数运算的算子，如：

(1)设X是向量空间，映射$I: x \mapsto x$是X上的恒等算子，I是线性算子.

(2)设X是向量空间，映射$O: x \mapsto \theta$是零算子，零算子是线性算子.

(3)设$P[a,b]$是$[a,b]$上所有多项式组成的向量空间，$T: x(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$是微分算子，是$P[a,b]$上的线性算子.

(4)$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$定义一个从$C[a,b]$到自身的线性算子，称为积分算子.

(5)$Tx(t)=tx(t)$是$C[a,b] \to C[a,b]$的线性算子.

(6)一个m行n列矩阵$A=(a_{ij})$通过

$$y=Ax, x=(\xi_j) \in \mathbf{R}^n, y=(\eta_i) \in \mathbf{R}^m$$

定义的算子$T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$是线性算子.

线性算子有许多良好的性质，是今后研究的主要对象. 但要注意，在不同的空间，如赋范线性空间、巴拿赫空间、希尔伯特空间上线性算子有些性质是不相同的.

方法、技巧与典型例题分析

要求首先是辨析概念，对线性算子、线性泛函有所了解，能证明一些算子是有界线性算子. 其次是对赋范线性空间线性算子的范数有所了解，能求一些较为简单的范数. 对线性泛函问题，应对

其连续性与有界性有所掌握.

例1 证明:从$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^2$的下列算子

$$T_1:(\xi_1,\xi_2)\mapsto(\xi_1,0),\quad T_2:(\xi_1,\xi_2)\mapsto(0,\xi_2),$$

$$T_3:(\xi_1,\xi_2)\mapsto(\xi_2,\xi_1),\quad T_4:(\xi_1,\xi_2)\mapsto(r\xi_1,r\xi_2)$$

均是线性算子,并从几何上予以解释. 指出T_1,T_2,T_3的定义域、值域和零空间.

证 容易验证,对于T_1,T_2,T_3,T_4,有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,\quad x,y\in D,\ \alpha,\beta\in A$$

成立,所以T_1,T_2,T_3,T_4均是线性算子.

(1)T_1是(ξ_1,ξ_2)到ξ_1轴的投影,$D(T_1)=\mathbf{R}^2$,$R(T_1)=\xi_1$轴,零空间$N(T)=\xi_2$轴.

(2)T_2是(ξ_1,ξ_2)到ξ_2轴的投影,$D(T_2)=\mathbf{R}^2$,$R(T_2)=\xi_2$轴,零空间$N(T)=\xi_1$轴.

(3)T_3是(ξ_1,ξ_2)关于直线$\xi_1=\xi_2$的反射,$D(T_3)=\mathbf{R}^2$,$R(T_3)=\mathbf{R}^2$,零空间$N(T)=$原点.

(4)T_4是(ξ_1,ξ_2)是一个相似变换.

例2 设V,W分别是向量空间X,Y的向量子空间,$T:X\to Y$是线性算子,证明:$T(V)$与$T^{-1}(W)$均是向量空间.

证 (1)$\forall\ y_1,y_2\in T(V)$,$\exists\ x_1,x_2\in V$,使得$y_1=Tx_1$,$y_2=Tx_2$. 由于V是向量空间,$\alpha x_1+\beta x_2\in V$. 又$T$是线性映射,所以

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2)\in T(V),$$

故$T(V)$是向量空间.

(2)$\forall\ x_1,x_2\in T^{-1}(W)$,有$Tx_1=y_1\in W$,$Tx_2=y_2\in W$. 由于$W$是向量空间,$T$是线性映射,所以

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2\in W,$$

即

$$\alpha x_1+\beta x_2\in T^{-1}(W),$$

故$T^{-1}(W)$是向量空间.

例3 设T是线性算子,证明:

(1)值域$R(T)$是向量空间;

(2)若 $\dim D(T)=n<\infty$，必 $\dim R(T)\leqslant n$；

(3)零空间 $N(T)$ 是向量空间.

证 (1)$\forall\ y_1,y_2\in R(T),\alpha,\beta\in K,\exists\ x_1,x_2\in D(T)$，使得 $y_1=Tx_1,y_2=Tx_2$. 由于 $D(T)$ 是向量空间，故 $\alpha x_1+\beta x_2\in D(T)$，从而 $T(\alpha x_1+\beta x_2)\in R(T)$. 因为 T 是线性映射，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\alpha y_1+\beta y_2,$$

所以 $\alpha y_1+\beta y_2\in R(T)$，即 $R(T)$ 是向量空间.

(2)若在 $R(T)$ 中任取 $n+1$ 个向量 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}$，则 $D(T)$ 中必存在 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，使得 $y_1=Tx_1,y_2=Tx_2,\cdots,y_{n+1}=Tx_{n+1}$. 由题设 $\dim D(T)=n$，故 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\}$ 必线性相关，从而有不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$，使得 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1}=\theta$. 由 T 是线性的，且 $T\theta=\theta$，故

$$T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_{n+1}y_{n+1}=\theta,$$

且 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}$ 是线性相关的，因此依定义，有 $\dim R(T)\leqslant n$.

(3)$\forall\ x_1,x_2\in N(T)$，有 $Tx_1=\theta,Tx_2=\theta$，故 $\forall\ \alpha,\beta\in K$，由 T 是线性的，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\theta,$$

即 $\alpha x_1+\beta x_2\in N(T)$，从而知 $N(T)$ 是向量空间.

例4 设 $K(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上二元勒贝格平方可积函数，空间 $L^2[a,b]$ 上的算子 T 定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(s,t)X(s)\mathrm{d}s,\quad x\in L^2[a,b],$$

证明：T 是 $L^2[a,b]\to L^2[a,b]$ 的有界线性算子，且有

$$\|T\|\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

证 $\forall\ x\in L^2[a,b]$，把 x 视为 $[a,b]\times[a,b]$ 上的二元可积函数，则函数 $K(s,t)X(s)$ 是二元可测的，且有

$$|K(s,t)X(s)|\leqslant\frac{1}{2}(|K(s,t)|^2+|X(s)|^2),$$

所以，$K(s,t)X(s)$ 是二元可积的. 依实变函数的富比尼定理，积分

$\int_a^b K(s,t)X(s)\mathrm{d}s$ 存在，从而$(Tx)(t)$是t的可测函数.

利用赫尔德不等式可得

$$|(Tx)(t)|^2\leqslant\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\int_a^b|x(s)|^2\mathrm{d}s.$$

由题设条件可知，上式右端是t的可积函数，从而左端函数也是t的可积函数，即$Tx\in L^2[a,b]$.

容易验证，算子T满足线性性. 而

$$\int_a^b|(Tx)(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_a^b|X(s)|^2\mathrm{d}s,$$

即
$$\|Tx\|^2\leqslant\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\cdot\|x\|^2.$$

从而证得
$$\|T\|\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

算子T称为希尔伯特-许密特型积分算子.

例5 设在$L^1(-\infty,\infty)$上定义算子

$$(Tx)(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ist}x(t)\mathrm{d}t,\ x\in L^1(-\infty,\infty),-\infty<s<\infty.$$

证明：T是$L^1(-\infty,\infty)$到$C(-\infty,\infty)$的有界线性算子.

证 由积分性质，T的线性是显然的. 而

$$\|Tx\|=\sup_s|(Tx)(s)|=\sup_s\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ist}x(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\mathrm{d}t=\|x\|.$$

从而知T确为$L^1(-\infty,\infty)$到$C(-\infty,\infty)$的有界线性算子.

例6 设$K(t,s)$是$[a,b]\times[a,b]$上的二元连续函数，在$C[a,b]$上定义

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(s,t)x(s)\mathrm{d}s,$$

证明：T是$C[a,b]$到$C[a,b]$的有界线性算子，且

$$\|T\|=\max_t\int_a^b|K(s,t)|\mathrm{d}s.$$

证 由题设条件与含参变量积分的连续性知，$\int_a^b K(s,t)x(s)\mathrm{d}s$ 是 t 的连续函数，故 $Tx \in C[a,b]$. 由积分性质，T 的线性是显然的.

下面求 T 的范数.

$$\|Tx\| = \max_t \int_a^b |K(s,t)x(s)\mathrm{d}s| \leqslant \max_t \int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}s \cdot \|x\|$$

所以
$$\|T\| \leqslant \max_t \int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}s.$$

又 $\int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}s$ 是 t 的连续函数，故 $\exists\ t_0 \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b |K(s,t_0)|\mathrm{d}s = \max \int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}s.$$

记
$$x_0(s) = \mathrm{sign}K(s,t_0) = \begin{cases} 1, & K(s,t_0) > 0, \\ 0, & K(s,t_0) = 0, \\ -1, & K(s,t_0) < 0, \end{cases}$$

则 x_0 是 $[a,b]$ 上可测函数，有

$$\int_a^b |K(s,t_0)|\mathrm{d}s = \int_a^b K(s,t_0)x_0(s)\mathrm{d}s.$$

若记 $M = \max_s |K(s,t_0)| + 1$，利用鲁金定理，取 $x_n \in C[a,b]$，使 $\|x_n\| < 1$，且

$$\int_a^b |x_0(s) - x_n(s)|\mathrm{d}s \leqslant 1/(nM),$$

则
$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b K(s,t_0)x_0(s)\mathrm{d}s - \int_a^b K(s,t_0)x_n(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_a^b |K(s,t_0)||x_0(s) - x_n(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \max_s |K(s,t_0)| \int_a^b |x_0(s) - x_n(s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned} \int_a^b |K(s,t_0)|\mathrm{d}s &= \int_a^b K(s,t_0)x_0(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_a^b K(s,t_0)[x_0(s) - x_n(s)]\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_a^b K(s,t_0)x_n(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} + \| Tx_n \| \leqslant \frac{1}{n} + \| T \| ,$$

从而知
$$\max_t \int_a^b |K(s,t)| \mathrm{d}s \leqslant \| T \| .$$

与前面结果综合，即得

$$\| T \| = \max_t \int_a^b |K(s,t)| \mathrm{d}s.$$

例 7 设在 $L^1[0,2\pi]$ 上定义

$$(Tx)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(t)}{1-z\mathrm{e}^{it}}\mathrm{d}t, \quad x \in L^1[0,2\pi],$$

证明：T 把 $L^1[0,2\pi]$ 中的元映为单位圆 $(|z|<1)$ 内的解析函数. 设 A_ρ $(\rho<1)$ 为在 $(|z|\leqslant\rho)$ 内解析，范数为 $\| y \| = \max\limits_{|z|<\rho} |y(z)|$ 的复函数构成的赋范线性空间，则 T 是 $L^1[0,2\pi]$ 到 A_ρ 的有界线性算子.

证 易证 A_ρ 是赋范线性空间.

下面证对于 $x\in L^1[0,2\pi]$，Tx 在 $(|z|<1)$ 中解析. 设 $|z_0|<1$，当 $z\to z_0$ 时，有

$$\left| \frac{(Tx)(z)-(Tx)(z_0)}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(t)\mathrm{e}^{it}}{(1-z_0\mathrm{e}^{it})}\mathrm{d}t \right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left| \int_0^{2\pi} \left[\frac{x(t)\mathrm{e}^{it}}{(1-z\mathrm{e}^{it})(1-z_0\mathrm{e}^{it})} - \frac{x(t)\mathrm{e}^{it}}{1-z_0\mathrm{e}^{it}} \right]\mathrm{d}t \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(t)| \left| \frac{1}{1-z_0\mathrm{e}^{it}} \right| \left| \frac{1}{1-z\mathrm{e}^{it}} - \frac{1}{1-z_0\mathrm{e}^{it}} \right| \mathrm{d}t \to 0.$$

所以知 Tx 是解析的.

$\forall\ \rho<1$，取 $\alpha>0$，使得当 $z\in(|z|\leqslant\rho)$ 时，有 $|1-z\mathrm{e}^{it}|\geqslant\alpha>0$，则对 $x\in L^1[0,2\pi]$，有

$$\| Tx \| = \max_{|z|\leqslant\rho} |T(x)(z)| = \max_{|z|\leqslant\rho} \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(t)}{1-z\mathrm{e}^{it}}\mathrm{d}t \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi\alpha} \| x \| ,$$

故 T 是 $L^1[0,2\pi]$ 到 A_ρ 的有界线性算子.

例 8 证明：有界线性算子 $T: X\to Y$ 的值域 $R(T)$ 在 Y 中不一

定是闭的.

证 令 $y_n=(\eta_j^{(n)})=Tx, x_n=(\xi_j^{(n)}), \xi_j^{(n)}=\dfrac{n\sqrt{j}}{n+j}$,则 $x_n\in l^\infty$, $\xi_j^{(n)}\to\xi_j=\sqrt{j}, \eta_j^{(n)}=\dfrac{n}{(n+j)\sqrt{j}}\to\dfrac{1}{\sqrt{j}}=\eta_j, y_n\in R(T)$. 而 $y=(\eta_j)\in\overline{R(T)}$,但是,由于 $x=(\xi_j)\overline{\in} l^\infty$,所以 $y\overline{\in} R(T)$. 即 $R(T)$ 在 Y 中不一定是闭的.

例9 设 X 是由所有 n 个实数有序组所组成的向量空间. Y 是由 r 个实数有序组全体所组成的向量空间. $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{jk})$ 定义一个从 X 到 Y 中的线性算子,设 Z 是所有 $r\times n$ 实矩阵所组成的向量空间. $\|\cdot\|,\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 分别是 X,Y,Z 上的范数.

如果 $\|\boldsymbol{A}x\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\ \|x\|_1$,则称 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 相容,证明:由 $\|\boldsymbol{A}\|=\sup\limits_{x\in X,x\neq 0}\dfrac{\|\boldsymbol{A}x\|_2}{\|x\|_1}$ 定义的范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 相容. 这个范数称为 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 定义的自然范数. 若取 $\|x\|_1=\max\limits_j|\xi_j|$, $\|y\|_2=\max\limits_j|\eta_j|$,证明:自然范数为

$$\|\boldsymbol{A}\|=\max_j\sum_{k=1}^n|a_{jk}|.$$

证 先证第一个论断. 因为

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}x\|_2&=\max_j\left|\sum_{k=1}^n a_{jk}\xi_k\right|\leqslant\max_j\sum_{k=1}^n|a_{jk}|\cdot\max_k|\xi_k|\\&=\|\boldsymbol{A}\|\ \|x\|_1,\end{aligned}$$

所以,$\|\boldsymbol{A}x\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\ \|x\|_1$,即 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 相容.

再证第二个论断,由 $\|\boldsymbol{A}x\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|x\|_1$,得 $\sup\dfrac{\|\boldsymbol{A}x\|_2}{\|x\|_1}\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$. 取使得 $\sum\limits_{k=1}^n|a_{jk}|$ 是最大值的 $j=s$,令 $x_0=(\xi_k^0)$,且

$$\xi_k^0=\begin{cases}|a_{sk}|/a_{sk}, & a_{sk}\neq 0,\\ 0, & a_{sk}=0\end{cases}$$

则
$$\|x_0\|=1,$$

$$\frac{\|Ax_0\|_2}{\|x_0\|_1}=\|Ax_0\|=\max_j\left|\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\xi_k^0\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|=\|A\|.$$

如果选

$$\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|,\quad \|y\|_2=\sum_{k=1}^{r}|\eta_k|,\quad \|A\|=\max_k\sum_{j=1}^{r}|a_{jk}|,$$

则
$$\|Ax_2\|=\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\xi_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}|a_{jk}||\xi_k|$$

$$\leqslant\max_k\sum_{j=1}^{r}|a_{jk}|\cdot\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|=\|A\|\,\|x\|_1.$$

则此时，$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$相容.

例 10 设无穷矩阵(a_{ij})满足$\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$，作$l^\infty$到$l^\infty$中的算子如下：若

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots),\quad Tx=y,$$

则
$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,\ i=1,2,\cdots.$$

证明：$\|T\|=\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$.

证 因为

$$\|Tx\|=\sup_i|\eta_i|=\sup_i\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\leqslant\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\,\|x\|,$$

所以
$$\|T\|\leqslant\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|.$$

又$\forall\ \varepsilon>0$，可取到数k，使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|\geqslant\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|-\varepsilon.$$

取$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，其中$\xi_i=\mathrm{sign}(a_{ij})$，于是，$\|x\|=1$，且

$$\| Tx \| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|.$$

因为 $\| Tx \| = \| T \| \cdot \| x \| \Longrightarrow \| T \| \geqslant \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| - \varepsilon.$

令 $\varepsilon \to 0$,则
$$\| T \| \geqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

综合两不等式即得 $\| T \| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|.$

例11 设无穷矩阵(a_{ij})满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{p/q}<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$ 作 l^p 到 l^p $(1<p<\infty)$的算子如下:若 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$,则 $Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$,其中 $\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$. 证明:$T$ 是有界线性算子.

证 由
$$\left(\sum_i|\eta_i|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_i\left|\sum_j a_{ij}\xi_j\right|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\left(\sum_i\left(\sum_j|a_{ij}|^q\right)^{p/q}\sum_j|\xi_j|^p\right)^{1/p}$$
$$=\left(\sum_i\left(\sum_j|a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}\left(\sum|\xi_i|^p\right)^{1/p}$$

可知,$T\in B(l^p\to l^p)$,T 是有界线性算子.

下面求T 的范数. 一种是直接求法,如前面例6 与例10 中的那样. 要证明 $\| T \| = M$(数),由 $\| T \| = \sup\limits_{\| x \| =1} \| Tx \|$,一方面证明对一切单位向量 x($\| x \| =1$),有 $\| Tx \| \leqslant M$;另一方面,又设法取一特殊的 x_0,使得 $\| x_0 \| =1$,而 $\| Tx_0 \| = M$,另一种求法是对范数作一个估计.

例 12 在空间 Φ^n 上,$\forall\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$定义 $\| x \| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|$;在空间 Φ^m,$\forall\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$定义 $\| y \| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|y_i|$,且映射 $T:\Phi^n\to\Phi^m$ 与 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$对应. 求 $\| T \|$.

解 设 $y=Tx$,则

$$\| Tx \| = \max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|$$

$$\leqslant\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big)\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|\Big)$$

$$=\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big)\|x\|,$$

从而
$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

又设
$$\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0 j}|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\ 1\leqslant i_0\leqslant m.$$

取 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，其中 $x_j^{(0)}=\mathrm{sign}a_{i_0 j}$，则 $\|x^{(0)}\|=1$，而

$$\|T\|\geqslant\|Tx^{(0)}\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(0)}\Big|=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0 j}|$$

$$=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

综合两不等式即得 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

例 13 定义 $T: C_0\to l^1$，当 $Tx=y$，$x=(x_n)$ 时，$y=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots)$，其中 $\alpha_n\in\Phi$，$\alpha=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<\infty$，求 $\|T\|$.

解 易证 T 是线性的. 又

$$\|Tx\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_nx_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\big(\sup_{n\geqslant 1}|x_n|\big)=\alpha\|x\|,$$

所以
$$\|T\|\leqslant\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.$$

又 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 数 k，使得 $\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_i|>\alpha-\varepsilon$. 取 $x^{(k)}=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k\text{个}},0,\cdots)$，则 $\|x^{(k)}\|=1$，$x^{(k)}\in C_0$. 有

$$\|T\|\geqslant\|Tx^{(k)}\|=\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|>\alpha-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，故 $\|T\|\geqslant\alpha$.

综合两不等式即得 $\|T\|=\alpha=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$.

例 14 设线性算子 $T: L[a,b]\to C[a,b]$ 定义为 $(Tf)(x)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. 证明: $\|T\|=1$.

证 任取 $f\in L[a,b]$, 使得 $\|f\|=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t=1$, 而

$$\|Tf\|=\max_x|(Tf)(x)|=\max_x\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\max_x\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t=1,$$

即得 $\|T\|\leqslant 1$.

又取 $f_0(t)=1/(b-a)$, 有 $f_0\in L[a,b]$, 且 $\|f_0\|=1$, 故

$$\|T\|=\sup_{\|f\|=1}\|Tf\|\geqslant\|Tf_0\|=\max_x\int_a^x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\frac{1}{b-a}\mathrm{d}t=1,$$

即得 $\|T\|>1$.

综合两不等式即得 $\|T\|=1$.

例 15 设线性算子 $T: L[a,b]\to L[a,b]$ 定义为 $(Tf)(x)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, 证明: $\|T\|=b-a$.

证 任取 $f\in L[a,b]$, 使得 $\|f\|=1$. 因为

$$\|Tf\|=\int_a^b\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a.$$

又对任何使 $a+1/n<b$ 的自然数 n, 作

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & x\in[a,a+1/n],\\ 0, & x\in[a+1/n,b],\end{cases}$$

则 $\|f_n\|=1$, 且

$$\|Tf_n\|=\int_a^b\left|\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x=\int_a^{a+1/n}n(x-a)\mathrm{d}x+\int_{a+1/n}^b 1\mathrm{d}x$$

$$=b-a-1/(2n)\Longrightarrow\|T\|\geqslant\sup_n\|Tf_n\|=b-a.$$

综合两式即得 $\|T\|=b-a$.

例 16 设 $C^1[a,b]$ 是 $J=[a,b]$ 上连续可微函数全体构成的赋范空间，其范数为

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)|,$$

证明：此范数满足范数公理. 令 $f(x)=x'(c)$，$c=(a+b)/2$，证明：f 是 $C'[a,b]$ 上的有界线性泛函. 如果将 f 看做 $C^1[a,b]$ 中所有连续可微函数组成的子空间上的泛函，证明：f 是无界的.

证 其范数满足范数定义中前两个要求是显然的，又

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\max_{t\in J}|x(t)+y(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)+y'(t)|\\&\leqslant\max_{t\in J}|x(t)|+\max_{t\in J}|y(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)|+\max_{t\in J}|y'(t)|\\&=\|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

从而知此范数满足范数公理.

因为在 $C'[a,b]$ 上，有

$$|f(x)|=|x'(c)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)|=\|x\|,$$

则 f 在 $C'[a,b]$ 上有界.

对于每个 n，都存在一个 $x_n\in C[a,b]$，且 $x_n'(c)=1$，$|x_n(t)|<1/n$，于是，有

$$\sup_x\frac{|f(x)|}{\|x\|}\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_n\|}=\frac{|x_n'(c)|}{\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)|}>n,$$

所以 f 在 $C[a,b]$ 上是无界的.

例 17 设 $f=0$ 是向量空间 X 上的任意线性泛函，$x_0\in X\backslash N(f)$ 是任意固定的元素，证明：对任意 $x\in X$，有惟一的表示式

$$x=ax_0+y,\ y\in N(f).$$

证 由于 $x_0\in X\backslash N(f)$，所以 $f(x_0)\neq0$，$\forall\ x\in X$，令 $\alpha=f(x)/f(x_0)$，$y=x-\alpha x_0$，则

$$f(y)=f(x)-\frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0,$$

故
$$x=\alpha x_0+y,\ y\in N(f).$$

若 $\tilde{\alpha}x_0+\tilde{y}=\alpha x_0+y$，则 $\tilde{y}-y=(\alpha-\tilde{\alpha})x$. 由于 $\tilde{y}-y\in N(f)$，所以

$$(\alpha-\tilde{\alpha})f(x)=f(\tilde{y}-y)=0.$$

又因为 $f(x_0)\neq 0$，于是 $\tilde{\alpha}=\alpha,\tilde{y}=y$，所以表示式惟一.

例 18 求 $C[-1,1]$ 上线性泛函 $f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x(t)\mathrm{d}t$ 的范数.

解 任取 $x\in C[-1,1]$，有

$$|f(x)|\leqslant\int_{-1}^{0}|x(t)|\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}|x(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2\|x\|,$$

可知 f 为有界线性泛函，且 $\|f\|\leqslant 2$.

取
$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in(-1,-1/n),\\ -nt, & t\in(-1/n,1/n),\\ -1, & t\in(1/n,1),\end{cases}$$

可知，$x_n\in C[-1,1]$，且 $\|x_n\|=1$. 于是

$$f(x_n)=\int_{-1}^{-1/n}\mathrm{d}t-\int_{-1/n}^{0}nt\mathrm{d}t+\int_{0}^{1/n}nt\mathrm{d}t+\int_{1/n}^{1}\mathrm{d}t$$
$$=2-1/n\xrightarrow{n\to\infty}2,$$

从而得 $\|f\|=2$.

类似(取 $x(t)=1/(\sqrt{2}\sqrt[4]{\tau})$)可求 $L^2[0,1]$ 上泛函 $f(x)=\int_{0}^{1}\sqrt{\tau}\,x(t^2)\mathrm{d}t$ 的范数为 $\|f\|=\sqrt{2}/2$.

例 19 证明：赋范线性空间 X 上非零线性泛函 f 不连续的充要条件是 f 的零空间 $N(f)$ 在 X 中稠密.

证 充分性 用反证法证. 设 f 是连续的，则由零空间 $N(f)$ 的稠密性可知，$\forall x\in X$，可在 $N(f)$ 中取到一 $\{x_n\}$，使得当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$，即 $f(x)=0$，与题设 $f\neq 0$ 相矛盾.

必要性 设 f 不连续，则由线性算子连续性定理知，f 必在 $x=0$ 处不连续. 从而存在某正数 ε 与一点列 $x_n\in X$，使得当 $x_n\to 0$ 时，$|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$.

$\forall\ x\in X$，显然$x-\dfrac{f(x)}{f(x_n)}x_n\in N(f)$，且当$n\to\infty$时，$x-\dfrac{f(x)}{f(x_n)}x_n\to x$，所以$N(f)$在$X$中稠密.

例20 设f是赋范线性空间X上非零的有界线性泛函，$H=\{x\mid x\in X, f(x)=1\}$，$d$为$X$中的零元$\theta$到$H$的距离，即$d=\inf\{\|x\|\mid x\in H\}$，证明：

$$\|f\|=\frac{1}{d}.$$

证 由题设知，$\forall\ x\in H$，有

$$1=|f(x)|\leqslant\|f\|\ \|x\|\Longrightarrow\|f\|\geqslant 1/\|x\|.$$

对所得不等式两端取上确界，可得

$$\|f\|\geqslant\sup\{1/\|x\|\mid x\in H\}=\frac{1}{d}.$$

再证反向不等式也成立. 由范数定义知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in X$，使得当$\|x_0\|=1$时，$|f(x_0)|>\|f\|-\varepsilon$. 于是，取$\bar{x}_0=x_0/f(x_0)$，则$f(\bar{x}_0)=1$，即$\bar{x}_0\in H$且

$$1=\|x_0\|=|f(x_0)|\ \|\bar{x}_0\|>(\|f\|-\varepsilon)\|x_0\|,$$

则
$$d\leqslant\|\bar{x}_0\|\leqslant\frac{1}{\|f\|-\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\|f\|}.$$

综合两个关于d的不等式，得$\|f\|=\dfrac{1}{d}$.

例21 设X是$C[a,b]$上有连续导函数的全体函数组成的线性子空间. 算子$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: X\to C[a,b]$，$x(t)\to\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x(t)$. 证明：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$是$X\to C[a,b]$的线性算子.

证 取$x_n(t)=\mathrm{e}^{-n(t-a)}$，$n=1,2,\cdots$，易知，对一切$n$，有

$$\|x_n\|=\max|\mathrm{e}^{-n(t-a)}|=1,$$

由于
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x_n\right)(t)=-n\mathrm{e}^{-n(t-a)}=-nx_n(t),$$

从而
$$\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x_n\right\|=n\to\infty\quad(n\to\infty).$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$满足线性是显然的，但是是无界算子.

例22 设V,W分别是向量空间X,Y的子空间，$T:X\to Y$是线性算子，证明：$T(V)$和$T^{-1}(W)$都是向量空间.

解 因为$\forall\ y_1,y_2\in T(V)$，存在$x_1,x_2\in V$，使得$y_1=Tx_1,y_2=Tx_2$. 又V是向量空间，$\alpha x_1+\beta x_2\in V$. 由题设知，$T$是线性的，所以

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2)\in T(V).$$

于是$T(V)$是向量空间.

$\forall\ x_1,x_2\in T^{-1}(W)$，有

$$Tx_1=y_1\in W,\ Tx_2=y_2\in W.$$

因为W是向量空间，T又是线性的，于是

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2\in W,$$

即

$$\alpha x_1+\beta x_2\in T^{-1}(W).$$

从而$T^{-1}(W)$是向量空间.

例23 求$L^2[0,1]$上泛函$f(x)=\int_0^1\sqrt{t}\,x(t^2)\mathrm{d}t$的范数.

解 直接计算即得

$$f(x)=\int_0^1\frac{x(\tau)}{2\sqrt[4]{\tau}}\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\tau}}\right)^{1/2}\left(\int_0^1|x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|.$$

取$x(\tau)=1/(\sqrt{2}\sqrt[4]{\tau})$，则有$\|x\|=1$，且$f(x)=\sqrt{2}/2$. 所以

$$\|f\|=\sqrt{2}/2.$$

例24 设$T:X\to Y$是线性算子，且$\dim X=\dim Y=n<\infty$，证明：$R(T)=Y$的充要条件是T^{-1}存在.

证 必要性 设$R(T)=Y$，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是Y的一个基，则存在$e_j\in X$，使得$b_j=Te_j$. 令$\sum_{j=1}^n\alpha_je_j=\theta$. 因为$T$是线性的，所以有

$$\sum_{j=1}^n\alpha_jTe_j=\sum_{j=1}^n\alpha_jb_j=\theta.$$

由于$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$线性无关，得$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，所以$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是$X$的一个基．若$Tx=\theta$，则$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$，使得

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\xi_j Te_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j b_j=\theta,$$

从而

$$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_j=0,$$

即$x=\theta$．故由逆算子定理知，T^{-1}存在．

充分性可由逆算子定理直接得出．（见本章第五节例1．）

例25 设T是从赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子，如果T的零空间$N(T)=\{x|Tx=\theta\}$是闭集，T是否有界？当T是有界算子时，$N(T)$是否必为闭集？

解 当$\{x_n\}\subset N(T)$，$x_n\to x$ $(n\to\infty)$时，$Tx=\lim_{n\to\infty}Tx_n=\theta$，故$x\in N(T)$．所以，当$T$为有界线性算子时，$N(T)$是闭集．

但是，当$N(T)$是闭集时，T不一定有界．例如，若X为$C[a,b]$中连续可微函数全体，定义$T:X\to C[a,b]$，$(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x(t)$，则

$$N(T)=\{x_n|x_n(t)\equiv C,C\text{ 为常数}\}.$$

显然，$N(T)$是闭的，但T却是无界的．

例26 设$C_0(-\infty,\infty)$是$(-\infty,\infty)$上适合条件$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$的全体连续函数按普通线性运算所成的线性空间，F是$C_0(-\infty,\infty)$上的线性泛函，且对一切$\varphi\in C_0(-\infty,\infty)$，当$\varphi(x)\geqslant 0$时，$F(\varphi)\geqslant 0$，证明：$F$必是连续的．

证 取

$$K_0=\{\varphi|\varphi\in C_0(-\infty,\infty),\varphi(x)\geqslant 0\text{ 对一切 }x\text{ 成立}\}.$$

证明存在$M>0$，使$\forall\ \varphi\in K_0$，有$F(\varphi)\leqslant M\|\varphi\|$．

用反证法证．设上式不成立，则必可取到一列$\{\varphi_i\}\subset K_0$，满足$0\leqslant\varphi_i(x)\leqslant 1$，$F(\varphi_i)\geqslant 1$．作$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)}{i^2}$，易见，$\varphi\in C_0(-\infty,\infty)$，$\varphi\geqslant 0$，且对于任何$n\in\mathbf{N}$，有

$$\varphi(x)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{i^2}.$$

由条件可得

$$F(\varphi)-F\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i}{i^2}\right)\geqslant 0\Longrightarrow F(\varphi)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\to\infty\ (n\to\infty),$$

导出矛盾. 所以,必有 $F(\varphi)\leqslant M\|\varphi\|$ 成立.

$\forall\ f\in C_0(-\infty,\infty)$,作分解 $f=f^+-f^-$,其中

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)<0,\end{cases}\quad f^-(x)=\begin{cases}0, & f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & f(x)<0.\end{cases}$$

于是,$f^{\pm}\in K_0$,则由上面证明结果可知

$$\begin{aligned}|F(f)|&=|F(f^+-f^-)|=|F(f^+)-F(f^-)|\\&\leqslant M(\|f^+\|+\|f^-\|)\leqslant 2M\|f\|,\end{aligned}$$

所以,F 是连续线性泛函.

例 27 设 A 是 $m\times n$ 矩阵:

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}},\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}.$$

定义 $T:C^n\to C^m$ 为

$$y=Tx=Ax,\ \forall\ x\in C^n.$$

证明:T 是 $C^n\to C^m$ 的连续线性算子.

证 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,由许瓦兹不等式,得

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\right)^{1/2}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\|x\|^2\right]^{1/2}\\&=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\|x\|.\end{aligned}$$

所以,T 是 $C^n\to C^m$ 的连续线性算子.

第二节　连续线性泛函的表示

主 要 内 容

1. 设 X,Y 是两个赋范线性空间. U 是 X 到 Y 的映射,且对一

切$x\in X$，有$\|Ux\|=\|x\|$，则称U是X到Y的一个**保范算子**. 如果U不仅是保范的，又是线性的，而且还实现X到Y上的一个一一对应（即$UX=Y$），则称U是X到Y上的**保范线性同构映射**. 若空间X与Y之间存在一个从X到Y上的同构映射，则称X和Y是**同构的**.

2. $(l^1)^*=l^\infty$.

l^1是满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty$的数列$x=(x_1,x_2,\cdots)$全体按普通线性运算与范数$\|x\|_1=\sum\limits_{v=1}^{\infty}|x_v|$所成的巴拿赫空间. l^∞是有界数列$x=(x_1,x_2,\cdots)$全体按普通线性运算和范数$\|x\|_\infty=\sup\limits_n|x_n|$所组成的巴拿赫空间.

3. $(l^p)^*=l^q$，其中$1<p<\infty$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

l^p是满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$的数列$(x_1,x_2,\cdots)$的全体，按$\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$所成的巴拿赫空间.

4. $(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]$，其中$1\leqslant p<\infty$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

疑 难 解 析

同构有什么意义？什么是线性赋范空间上连续线性泛函的表示？

答　如果$U: x\to Ux$，$x\in X$，实现了X到Y的一个同构，则可把x与y视为同一的，称为同一化. 于是，可以把X与Y同一化，并记为$X=Y$. 一般认为，在同构的意义下，同构的两个空间从集合、线性结构及范数三方面去考察，是没有区别的. 如果一个抽象的赋范线性空间，能与一个具体的赋范线性空间同构，就把这个具体空间的形式称为抽象空间的一个表示.

赋范线性空间X上连续线性泛函的表示，是研究X^*这个赋范线性空间能与怎样的具体空间实现同构，其研究方法是：

(1)在X中取适当的元素集$\mathscr{F}$，使$\mathscr{F}$中元素的线性组合在X中稠密，集$\mathscr{F}$称为X中的母元组；

(2)把泛函f在$\mathscr{F}$上的形式表示出来后，利用$\mathscr{F}$中元素的线性组合在X中的稠密与f的连续性，把f在X上的形式表示出来.

方法、技巧与典型例题分析

赋范线性空间X的共轭空间X^*，按照普通的线性运算和泛函范数是完备的赋范线性空间. 要求在理解基本概念的基础上，掌握赋范线性空间上连续线性泛函的表示.

例1 在二维线性空间K_2中引入范数

$$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|,\quad x=(\xi_1,\xi_2)\in K_2,$$

构成赋范线性空间. 在K_2上定义泛函f，即

$$f(x)=\alpha\xi_1+\beta\xi_2,\ x=(\xi_1,\xi_2)\in K_2,$$

求$\|f\|$.

解 因为对于任意$x=(\xi_1,\xi_2)$，有

$$|f(x)|=|\alpha\xi_1+\beta\xi_2|\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|)\cdot\|x\|,$$

所以

$$\|f\|\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|).$$

再证反向不等式也成立. 取$x=(\mathrm{sign}\alpha,0)$，则$\|x\|=1$且$f(x)=|\alpha|$，故$\|f\|=\|\alpha\|$. 类似可得$\|f\|=\|\beta\|$，所以

$$\|f\|>\max(|\alpha|,|\beta|).$$

综合两不等式即得$\|f\|=\max(|\alpha|,|\beta|)$.

例2 设K^n是n维实的(或复的)线性空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是它的一组基，证明：$(K^n)^*=K^n$.

证 对$x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$，取$\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$，则$K^n$是赋范线性空间. 对一组数$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，定义

$$f:\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\to\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i,$$

则f显然是X上的一个线性泛函，且线性泛函在基选定后与数组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是一一对应的，即$K^n$上任一线性泛函$f$对应$K^n$中一个元$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n))$，使得

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,$$

且在K^n上任一线性泛函是连续的.

由上知，映射$U:(K^n)^*\to K^n$，

$$f\mapsto(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n))$$

是双射. U的线性是显然的，只需证U保距.

对任何$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，因为

$$|f(x)|=\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\Big|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{1/2}$$
$$=\|\alpha\|\ \|x\|,$$

从而

$$\|f\|\leqslant\|\alpha\|.$$

再证反向不等式也成立. 取

$$x_0=\frac{1}{\|\alpha\|}(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n'),$$

则

$$\|x_0\|=1,$$

且 $$f(x_0)=\frac{1}{\|\alpha\|}f[(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n')]=\frac{1}{\|\alpha\|}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_i'=\|\alpha\|,$$

因此

$$\|f\|\geqslant\|\alpha\|.$$

综合两不等式即得$\|f\|=\|\alpha\|$，即U是保距的，故

$$(K^n)^*=K^n.$$

例3 证明：$(l^1)^*=l^\infty$.

证 按疑难解析中的步骤研究.

在l^1中取母元组

$$\mathscr{F}=\{e_n|e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots),\ n=1,2,\cdots\},$$

则对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in l^1$，有$x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$.

$\forall\ f\in(l^1)^*$，记$\eta_i=f(e_i)$，则$|\eta_i|\leqslant\|f\|\ \|e_i\|=\|f\|$，从而$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^\infty$且$\|\eta\|=\sup\limits_i|\eta_i|\leqslant\|f\|$.

又由f的连续性，有

$$|f(x)|=\lim_{n\to\infty}f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i\eta_i.$$

由$|\eta_i|\leqslant\|f\|$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty$知，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i$绝对收敛，故

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i, \qquad ①$$

即l^1上的连续泛函f的形式必为式①.

反之，若设$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，则利用式①可定义$l^1$上一个泛函$f$. f的线性是显然的，且

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x_i\eta_i|\leqslant\|\eta\|\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|=\|\eta\|\ \|x\|,$$

可知f是l^1上的连续线性泛函，且$\|f\|\leqslant\|\eta\|$. 综合前面的反向不等式，得$\|f\|=\|\eta\|$.

由式①将l^1上每个f与l^∞上元$\eta=(f(e_1),f(e_2),\cdots)$对应，即得映射$U:f\to\eta$. U是$(l^1)^*$到l^∞上的双射，其线性是显然的，且$\|f\|=\|\eta\|=\|Uf\|$，故U是$(l^1)^*$到l^∞上的保范线性算子，从而

$$(l^1)^*=l^\infty.$$

注意

$$(l^\infty)^*\neq l^1.$$

回顾证明过程：先设想$f\Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ie_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_if(e_i)$，再验证$f\to(f(e_1),f(e_2),\cdots)$是同构映射. 主要内容3（$(l^p)^*=l^q$，$1<p<\infty,1/p+1/q=1$）类似可证.

例 4 设 C_0 表示收敛于零的序列 $\{x_n\}$ 全体，按普通的线性运算和范数 $\|x\|=\sup_n|x_n|$，C_0 是巴拿赫空间，证明：$(C_0)^*=l^1$.

证 类似例 3 的方法可证. 在 C_0 中取母元组

$$\mathscr{F}=\{e_n\mid e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots),n=1,2,\cdots\},$$

则对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in C_0$，有 $x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$.

设 $f\in(C_0)^*$，记 $\eta_i=f(e_i)$，$i=1,2,\cdots$，则

$$f(x)=f\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big)=\lim_{n\to\infty}f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i\eta_i=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i.$$

取
$$x^{(n)}=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n},0,\cdots),$$

其中 $\theta_i=\arg\eta_i$，则 $x^{(n)}\in C_0$，且 $\|x^{(n)}\|=1$，$f(x^{(n)})=\sum\limits_{i=1}^{n}|\eta_i|$，得

$$\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|\leqslant|f(x^{(n)})|\leqslant\|f\|\ \|x^{(n)}\|\leqslant\|f\|.$$

令 $n\to\infty$，即得 $\eta\in l^1$，且 $\|\eta\|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\leqslant\|f\|$.

再证反向不等式成立. 因为 f 是 C_0 上的线性泛函，且对 $x\in C_0$，有

$$|f(x)|\leqslant\sup_i|x_i|\sum_i|\eta_i|=\|\eta\|\ \|x\|,$$

故 $f\in(C_0)^*$ 且 $\|f\|\leqslant\|\eta\|$. 综合两不等式得 $\|f\|=\|\eta\|$. 从而知 $U:(C_0)^*\to l^1$，$f\to(f(e_1),f(e_2),\cdots)$ 是保范线性同构，即

$$(C_0)^*=l^1.$$

例 5 设 X_1,X_2 为赋范线性空间，对积空间 $X_1\times X_2$ 取范数 $\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|$，证明：

$$(X_1\times X_2)^*=X_1^*\times X_2^*,$$

其中 $X_1^*\times X_2^*$ 上范数定义为 $\|(f_1,f_2)\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.

证 对$(f_1,f_2)\in X_1^*\times X_2^*$，定义$(f_1,f_2)(x_1,x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$，可以直接验证$(f_1,f_2)$是$X_1\times X_2$上的线性泛函.

$\forall\ (x_1,x_2)\in X_1\times X_2$，有

$$\begin{aligned}|(f_1,f_2)(x_1,x_2)|&\leqslant|f_1(x_1)|+|f_2(x_2)|\\&\leqslant\|f_1\|\ \|x_1\|+\|f_2\|\ \|x_2\|\\&\leqslant\max(\|f_1\|,\|f_2\|)(\|x_1\|+\|x_2\|),\end{aligned}$$

从而得$(f_1,f_2)\in(X_1\times X_2)^*$，且成立

$$\|(f_1,f_2)\|\leqslant\max(\|f_1\|,\|f_2\|).$$

再证反向不等式成立. $\forall\ f\in(X_1\times X_2)^*$，记$f_1(x_1,\theta)=f(x_1,\theta)$，则$|f_1(x_1)|\leqslant\|f\|\ \|x_1\|$，$f_1\in X_1^*$；类似地，记$f_2(\theta,x_2)=f(\theta,x_2)$，有$f_2\in X_2^*$. 因为$f=(f_1,f_2)$，因此

$$(X_1\times X_2)^*=X_1^*\times X_2^*.$$

若$\max(\|f_1\|,\|f_2\|)=\|f_1\|$，取$\{x_1^{(n)}\}\subset X_1$，有$\|x_1^{(n)}\|=1$，使得$f_1(x_1^{(n)})\to\|f_1\|\ (n\to\infty)$. 这样，就有$\|(x_1^{(n)},\theta)\|=1$，且当$n\to\infty$时，有

$$(f_1,f_2)(x_1^{(n)},\theta)=f_1(x_1^{(n)})\to\|f_1\|.$$

所以 $\|(f_1,f_2)\|\geqslant\|f_1\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.

类似可证 $\|(f_1,f_2)\|\geqslant\|f_2\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.

即 $\|(f_1,f_2)\|\geqslant\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.

综合两不等式即得$\|(f_1,f_2)\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.

例6 设X为赋范线性空间，X_1为巴拿赫空间，X_0为X的稠密子空间，T_0是从X_0到X_1的有界线性算子. 证明：T_0必可保范地延拓到整个X上.

证 要T_0保范地延拓到整个X上，即要证明X上惟一地存在有界线性算子，满足：(1) $Tx=T_0x$对于一切$x\in X_0$成立；(2) $\|T\|=\|T_0\|$.

因为$\forall\ x\in X$，由于X_0在X中稠密，所以可取到点$\{x_n\}\subset X_0$，使得当$n\to\infty$时，$x_n\to x$.

令$Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_0x_n$，证明定义是合理的，且满足(1)、(2).

首先，$\{x_n\}$是收敛的，且为X中的基本点列. 又T_0在X_0上有界，所以$\{T_0x_n\}$是X_1中的基本点列. 由X_1的完备性知，$\lim\limits_{n\to\infty}T_0x_n$是存在的.

若又有$\{y_n\}\subset X_0$，当$n\to\infty$时，$y_n\to x$，则

$$\|T_0x_n-T_0y_n\|\leqslant\|T_0\|\ \|x_n-y_n\|\to 0.$$

可知，Tx的定义与$\{x_n\}$的选择无关.

T的线性是易于验证的，且有$T|_{x_0}=T_0$，则$\|T\|\geqslant\|T_0\|$. 再对$x\in X$，取$\{x_n\}\subset X_0$，使得当$n\to\infty$时，$x_n\to x$，则

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_0x_n\|\leqslant\|T_0\|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|T_0\|\ \|x\|.$$

从而$\|T\|\leqslant\|T_0\|$.

综合两不等式即得$\|T\|=\|T_0\|$.

由以上结论确定T_0可保范地延拓到整个X上.

例7 设$\{x_n\}$为一列赋范线性空间，$\left(\prod\limits_n x_n\right)_p$是指$\{(x_n)\,|\,x_n\in X_n,\ n=1,2,\cdots,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty\}$按范数$\|(x_n)\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{1/p}$和运算$\alpha(x_n)+\beta(y_n)=(\alpha x_n+\beta y_n)$所组成的赋范线性空间，其中$1<p<\infty$. 证明：

$$\left(\left(\prod_n x_n\right)_p\right)^*=\left(\prod_n x_n^*\right)_q,$$

其中$1/p+1/q=1$.

证 对任何$(x_n^*)\in\left(\prod\limits_n x_n^*\right)_q$，$(x_n)\in\left(\prod\limits_n x_n\right)_p$，作映射$F:\left(\prod\limits_n x_n^*\right)_q\to\left(\left(\prod\limits_n x_n\right)_p\right)^*$如下：

$$F(x_n^*)(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n).$$

显然，$F(x_n^*)$是线性的.

$$\| F(x_n^*)(x_n) \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n^* \| \ \| x_n \| \leqslant \| (x_n^*) \|_q \| x_n \|_p$$

说明$F(x_n^*) \in \left(\left(\prod_n x_n \right)_p \right)^*$与$\| F(x_n^*) \| \leqslant \| (x_n^*) \|_q$.

又对于任何

$$f \in \left(\left(\prod_n x_n \right)_p \right)^*, (0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \in \prod_n x_n,$$

作泛函

$$x_n^*(x_n) = f((0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots)).$$

由f的线性连续可知，$x_n^* \in X_n^*$，且对于$(x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots)$，有

$$f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f((0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = F(x_n^*)(x_n).$$

任取一点列$\{\varepsilon_n\}$，$\varepsilon_n > 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. 取$x_n \in X_n$，使得$\| x_n \| = 1$，且$|x_n^*(x_n) - \| x_n^* \| | < \varepsilon_n$，记$\| x_n^* \| = a_n$，有

$$\begin{aligned} & f(a_1^{q-1} x_1, a_2^{q-1} x_2, \cdots, a_N^{q-1} x_N, 0, \cdots) \\ & = \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n) a_n^{q-1} \\ & = \sum_{n=1}^{N} x_n^*(a_n^{q-1} x_n), f(a_1^{q-1} x_1, a_2^{q-1} x_2, \cdots, a_N^{q-1} x_N, 0, \cdots) \\ & \leqslant \| f \| \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \| f \| \left(\sum_{n=1}^{N} \| x_n^* \|^q \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

因为
$$|x_n^*(a_n^{q-1} x_n) - \| x_n^* \|^q | \leqslant a_n^{q-1} \varepsilon_n,$$

所以
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} (\| x_n^* \|^q) & \leqslant \sum_{n=1}^{N} \| x_n^* \| (a_n^{q-1} x_n) + \sum_{n=1}^{N} a_n^{q-1} \varepsilon_n \\ & \leqslant \| f \| \left(\sum_{n=1}^{N} \| x_n^* \|^q \right)^{1/p} + \| f \|^{q-1} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n. \end{aligned}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$的任意性，有

$$\sum_{n=1}^{N}\|x_n^*\|^q \leqslant \|f\|\left(\sum_{n=1}^{N}\|x_n^*\|^q\right)^{1/p},$$

从而
$$\left(\sum_{n=1}^{N}\|x_n^*\|^q\right)^{1/p} \leqslant \|f\|$$

令$N\to\infty$，即得$\|x_n^*\|_q \leqslant \|f\| = \|F(x_n^*)\|$.

综合上述不等式即得$\|F(x_n^*)\| = \|x_n^*\|_q$.

例8 证明：$(l^p)^* = l^q, 1<p<\infty, 1/p+1/q=1$.

证 令$e_k=(\delta_{k_j})\in l^p$，则$\{e_p\}$是$l^p$的邵德尔(Schauder)基，对每个$x=\{\xi_k\}\in l^p$，有惟一表达式$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$. $\forall f\in(l^p)^*$，由于f是线性有界的，所以有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k r_k,\quad r_k=f(e_k). \qquad ②$$

以下证$\{r_k\}\in l^q$. 取

$$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}\in l^p,$$

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|r_k|^q/r_k, & k<n \text{ 且 } r_k\neq 0,\\ 0, & k>n \text{ 或 } r_k=0,\end{cases} \qquad ③$$

将$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$代入式②，得

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}r_k=\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q.$$

利用式③及$(q-1)p=q$，有

$$\begin{aligned}|f(x_n)| &\leqslant \|f\|\,\|x_n\| = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{1/p}\\ &= \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p}\\ &= \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\right)^{1/p},\end{aligned}$$

从而
$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q \leqslant \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\right)^{1/q},$$

即 $$\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|.$$
于是，由 n 的任意性，令 $n\to\infty$，得
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|r_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|,$$
即 $$\{r_k\}\in l^q. \qquad ④$$

定义算子 T，$T:(l^p)^*\to l^q, f\mapsto\{f(e_k)\}$，则 T 显然是线性的.

$\forall\ \{\alpha_k\}\in l^q$，定义 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k$，得到 l^p 上一线性泛函 g，由赫尔德不等式，有
$$|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\alpha_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^q\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|^q\right)^{1/q}$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|^q\right)^{1/q}\|x\|,$$
所以 g 有界，$\alpha_k=g(e_k)$，$\{\alpha_k\}=Tg$，从而 T 是满射.

由式②及赫尔德不等式，有
$$|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k r_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|r_k|^q\right)^{1/q}\|x\|,$$
于是 $\|f\|\leqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|r_k|^q\right)^{1/q}$. 再由式④，得
$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|r_k|^q\right)^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^q\right)^{1/q},$$
因此，$\|Tf\|=\|f\|$，从而 T 是保范的，且是一一映射的. 在同构的意义下，有 $(l^p)^*=l^q$.

例9 证明：定义在同一向量空间上且有同一零空间的两个线性泛函 $f_1\neq0$ 和 $f_2\neq0$ 是成比例的.

证 由第一节例 17 知
$$x=f_1(x)/f_1(x_0)\cdot x_0+y,\quad y\in N(f_1)=N(f_2).$$
因此 $$f_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x_0)/f_1(x_0),$$
可知 $f_1\neq0$ 与 $f_2\neq0$ 是成比例的.

例10 证明：赋范线性空间X上有界线性泛函$f\neq 0$的范数等于原点到超平面$H_1=\{x\in X|f(x)=1\}$距离$\widetilde{d}=\inf\{\|x\|\,|f(x)=1\}$的倒数.

证 任取$x\in H_1$，则$1=|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|$，所以$\|x\|\geqslant 1/\|f\|$，且$\widetilde{d}\geqslant 1/\|f\|$.

又$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x\in H_1$，使得

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|}=\frac{1}{|x|}>\|f\|-\varepsilon.$$

所以
$$\|x\|<\frac{1}{\|f\|-\varepsilon},\quad \widetilde{d}\leqslant\frac{1}{\|f\|}.$$

综合上述两个不等式，得$\|f\|=1/\widetilde{d}$.

例11 证明：第一节例17中，X的两个元素x_1,x_2属于商空间$X/N(f)$的同一元素当且仅当$f(x_1)=f(x_2)$，并证$\mathrm{Codim}N(f)=1$.

证 设$x_1,x_2\in\hat{x}\in X/N(f)$

$$\Leftrightarrow x_1-x_2\in N(f)$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)=0.$$

因为$f\neq 0$，所以$X/N(f)\neq\{\theta\}$，$\mathrm{Codim}N(f)=\dim X/N(f)>0$.

若$\hat{x},\hat{y}\in X/N(f)$，则

$$\hat{x}=x+N(f),\quad \hat{y}=y+N(f).$$

$\forall\ x_0\in X\backslash N(f)$，$x=a_1x_0+z_1$，$y=a_2x_0+z_2$，$z_2,z_1\in N(f)$，从而$\hat{x}=a_1x_0+N(f)$，$\hat{y}=a_2x_0+N(f)$. 所以

$$a_2\hat{x}-a_1\hat{y}=N(f)=\hat{\theta},$$

即$\hat{x},\hat{y}$线性相关. 于是，$\dim X/N(f)\leqslant 1$.

第三节 线性泛函的延拓

主要内容

1. 定义1 实线性空间X上的实值泛函P，若对任何$\alpha\geqslant 0$和x

$\in X$，有

$$P(\alpha x)=\alpha P(x),$$

则称 P 满足**非负齐性**. 若对任何 $x,y\in X$，有

$$P(x+y)\leqslant P(x)+P(y),$$

则称 P 满足**次可加性**.

2. 定理1 设 P 是实线性空间 X 上具有非负齐性和次可加性的泛函，又 f 是 X 的线性子空间 L 上的实线性泛函，并在 L 上有 $f(x)\leqslant P(x)$，$x\in L$ 成立，则 f 必能延拓成全空间 X 上的线性泛函 F，且有 $F(x)\leqslant P(x)$，$x\in X$.

3. 定义2 设 X 是实(或复)线性空间，P 是定义在 X 上的实值函数，满足：

(1)非负性 $\forall\, x\in X, P(x)\geqslant 0$，

(2)次可加性 $\forall\, x,y\in X, P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$，

(3)绝对齐性 $\forall\, x\in X$ 和数 α，$P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$，则称 P 是 X 上的**拟范数**.

X 上的拟范数成为范数的充要条件是 $P(x)=0$ 等价于 $x=\theta$.

4. 定理2 设 P 是实(或复)的线性空间 X 上的拟范数，f 是 X 的线性子空间 L 上的线性泛函，并且 $|f(x)|\leqslant P(x)$，$x\in L$，则 f 必能延拓为全空间 X 上的一个线性泛函 F，且使得 $|F(x)|\leqslant P(x)$，$x\in X$.

5. 定义3 设 X,Y 是赋范线性空间，A 是 $D(A)\subset X$ 到 Y 中的线性算子，又设 $G\subset D(A)$. 若 $\|A\|_G=\sup\limits_{x\in G,\|x\|=1}\|Ax\|$ 是有限数，则称 A 在 G 上有界，又称 $\|A\|_G$ 为 A 在 G 上的范数.

定理3 设 f 是赋范线性空间 X 的线性子空间 L 上的连续线性泛函，f 在 L 上的范数为 $\|f\|_L$，则 f 必能延拓为 X 上的连续线性泛函 F，且 $\|F\|=\|f\|_L$.

定理4 设 X 是赋范线性空间，Y 是巴拿赫空间，G 是 X 的稠密子空间，A 是 G 到 Y 的线性有界算子，则 A 必可延拓成 X 到 Y 的线性有界算子 B，且保持范数不变：$\|B\|=\|A\|$. 这种延拓是惟

一的.

定理5 设L是赋范线性空间X的线性子空间,$x_0\in X$,且$d=\rho(x_0,L)>0$,则必存在X上的连续线性泛函f,适合条件:

(1)$x\in L$时,$f(x)=0$; (2)$f(x_0)=d$;

(3)$\|f\|=1$.

6. **定理6** 设A是实赋范线性空间X的线性子空间,g为A上的实线性连续泛函. 对于任一向量$x_0\in X\backslash A$,设A_1是A与x_0张成的线性子空间,则在A_1上必有线性连续泛函g_1,使得

(1)当$x\in A$时,$g_1(x)=g(x)$;

(2)$\|g_1\|_{A_1}=\|g\|_A$.

定理7(哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理1) 设G是赋范线性空间X的线性子空间,对于G上任一有界线性泛函f,可以作出X上的有界线性泛函F,使其满足:

(1)当$x\in G$时,$F(x)=f(x)$;

(2)$\|f\|_G=\|F\|$.

定理8(哈恩-巴拿赫定理2) 设G是赋范线性空间X的线性子空间,$P(x)$是X上的拟范数,对于G上任何一个给定的线性泛函f,满足条件$k=\sup\limits_{x\in G,P(x)\leqslant 1}|f(x)|<\infty$时,$f$必可延拓为$E$上的线性泛函$F$,且满足$\sup\limits_{x\in X,P(x)\leqslant 1}|F(x)|=k$.

7. **定理9(黎斯(F. Riesz)定理)** 设f是$C[a,b]$上的连续线性泛函,则必有惟一的$g\in V_0[a,b]$,使得当$x\in C[a,b]$时,$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t)$,且有$\|f\|=\|g\|$.

推论 设P是$[a,b]$上多项式全体,把P作为$C[a,b]$的线性子空间,又设f是P上的连续线性泛函,则f可惟一地延拓成$C[a,b]$上的连续线性泛函,且存在惟一的$g\in V_0[a,b]$,使得$\forall\ x\in[a,b]$,有$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t)$成立.

定理10 设f是$C[a,b]$上的连续线性泛函,则必有惟一的$g\in$

$V_{2\pi}$,使得当$x\in C_{2\pi}$时,有

$$f(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\mathrm{d}g(t)\quad 且\quad \|f\|=\bigvee_0^{2\pi}(g).$$

推论 设T是周期为2π的三角多项式全体,T是$C_{2\pi}$的线性子空间,f是T上的连续线性泛函,则f必能惟一地延拓成$C_{2\pi}$上的连续线性泛函,且有惟一的$g\in V_{2\pi}$,使得

$$f(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\mathrm{d}g(t).$$

疑难解析

什么是延拓问题?怎样理解线性泛函在线性空间上的延拓?

答 延拓问题是研究定义在给定集X的一个子集A上的某数学对象(例如映射)能否扩充到整个集X上,并且保持数学对象的某些基本性质. 本节研究线性空间上线性泛函在什么条件下可以延拓、延拓后哪些性质不变、延拓是否惟一等问题.

关于线性泛函的延拓定理统称为哈恩-巴拿赫定理2,它保证赋范线性空间上具有充分多的有界线性泛函及线性泛函的取值可事先指定,并且为共轭空间提供必需的理论.

方法、技巧与典型例题分析

例1 设P是满足非负齐性与次可加性的线性泛函(也称**次线性泛函**),证明:次线性泛函P满足$P(\theta)=0$和$P(-x)\geqslant -P(x)$.

证 因为$P(\theta)=P(0x)=0P(x)=0$,所以$P(\theta)=0$.

又 $$0=P(\theta)=P(-x+x)\leqslant P(x)+P(-x),$$

所以 $$P(-x)\geqslant -P(x).$$

例2 若P是向量空间X上的次线性泛函,证明:$M=\{x\,|\,P(x)\leqslant r, r>0\text{ 常数}\}$是一个凸集.

证 因为,$\forall\, x,y\in M$和$0\leqslant\alpha\leqslant 1$,有

$$P(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant P(\alpha x)+P((1-\alpha)y)=\alpha P(x)+(1-\alpha)P(y)$$

$$\leqslant \alpha r+(1-\alpha)r=r,$$

即知 $\alpha x+(1-\alpha)y\in M$，所以 M 是凸集.

例3 若 P_1 与 P_2 均为向量空间 X 上的次线性泛函，且 C_1 与 C_2 是正常数，证明：$P=C_1P_1+C_2P_2$ 是 X 上的次线性泛函.

证 因为，$\forall\ x,y\in X$ 和 $\alpha\geqslant 0$，有

$$P_i(x+y)\leqslant P_i(x)+P_i(y),\ i=1,2,$$

$$P_i(\alpha x)=\alpha P_i(x),\ i=1,2,$$

所以
$$\begin{aligned}P(x+y)&=C_1P_1(x+y)+C_2P_2(x+y)\\&\leqslant C_1[P_1(x)+P_1(y)]+C_2[P_2(x)+P_2(y)]\\&=[C_1P_1(x)+C_2P_2(x)]+[C_1P_1(y)+C_2P_2(y)]\\&=P(x)+P(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\alpha x)&=C_1P_1(\alpha x)+C_2P_2(\alpha x)=C_1\alpha P_1(x)+C_2\alpha P_2(x)\\&=\alpha[C_1P_1(x)+C_2P_2(x)]=\alpha P(x).\end{aligned}$$

从而知 $P=C_1P_1+C_2P_2$ 是 X 上的次线性泛函.

例4 设 P 是实向量空间 X 上一个次线性泛函，

$$Z=\{x\in X\,|\,x=\alpha x_0,\alpha\in\mathbf{R}\},$$

$x_0\in X$ 是一固定元素，在 Z 上定义泛函 f 为 $f(x)=\alpha P(x_0)$. 证明：f 是 Z 上的线性泛函且满足 $f(x)\leqslant P(x)$.

证 对于 $x=\alpha x_0$，$y=\beta x_0$，有

$$\begin{aligned}f(x+y)&=f[(\alpha+\beta)x_0]=(\alpha+\beta)P(x_0)\\&=\alpha P(x_0)+\beta P(x_0)=f(x)+f(y),\end{aligned}$$

$$f(rx)=f(r\alpha x_0)=r\alpha P(x_0)=rf(x),\ r\in\mathbf{R}.$$

所以，f 在 Z 上是线性的.

对于 $\alpha\geqslant 0$，$f(x)=\alpha P(x_0)=P(x)$；对于 $\alpha<0$，由例1，有

$$f(x)=\alpha P(x_0)\leqslant -\alpha P(-x_0)=P(\alpha x_0)=P(x).$$

因此
$$f(x)\leqslant P(x),\ x\in X.$$

例5 设赋范线性空间 X 上一个次可加泛函 P 在点 θ 连续，且 $P(\theta)=\theta$，证明：P 对所有 $x\in X$ 是连续的.

证 因为，$\forall\ x_0\in X$ 和 $x\in X$，有

$$P(x)-P(x_0)\leqslant P(x-x_0),\quad P(x_0)-P(x)\leqslant P(x_0-x),$$
而当 $x\to x_0$ 时，有 $(x-x_0)\to\theta$，故由题设得

$$\lim_{x\to x_0}|P(x)-P(x_0)|=0.$$

所以，P 在每个 $x_0\in X$ 是连续的.

例 6 设 X 是赋范线性空间，$x_0\in X$，$x_0\neq\theta$，证明：一定存在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $\|f\|=1$，且 $f(x_0)=\|x_0\|$.

证 取 X 的一维子空间 $X_1=\{\alpha x_0|\alpha$ 是实数$\}$. 在 X 上定义一个泛函 $f_1(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$，则 f_1 的线性是显然的，且有

$$|f_1(\alpha x_0)|=|\alpha|\,\|x_0\|=\|\alpha x_0\|,$$

所以得出 f_1 在 X_1 上的范数 $\|f_1\|_{X_1}=1$. 由主要内容中的定理 3 知，存在全空间 X 上的连续线性泛函 f，使得 f 是 f_1 的延拓，并且 $\|f\|=\|f_1\|_{X_1}=1$. 从而有 $f(x_0)=f_1(x_0)=\|x_0\|$.

由此可以得出：当 X 是赋范线性空间时，对任何 $x_0\in X$，有

$$\|x_0\|=\sup\{|f(x_0)|\,|f\in X^*,\|f\|=1\}. \qquad ①$$

这是因为，当 $f\in X^*$，且 $\|f\|=1$ 时，有

$$|f(x_0)|\leqslant\|f\|\,\|x_0\|=\|x_0\|,$$

而由例 6 知，可以取到 $f\in X^*$，使得 $\|f\|=1$，且 $f(x_0)=\|x_0\|$，从而式①成立.

例7(矩量定理) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是赋范线性空间 X 中一组线性无关的向量，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意一组数，证明 X 上存在连续线性泛函 f，满足：(1) $f(x_i)=c_i$，$i=1,2,\cdots,n$；(2) $\|f\|\leqslant M$ 的充要条件是，对任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^n t_ic_i\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|.$$

证 必要性 设有 $f\in X^*$，且满足条件(1)、(2)，则可得

$$\left|\sum_{i=1}^n t_ic_i\right|=\left|\sum_{i=1}^n t_if(x_i)\right|=\left|f\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)\right|$$
$$\leqslant\|f\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|.$$

充分性　以X_1记由$x_1,x_2,\cdots,x_n$张成的线性子空间，所以X_1中元素可由$x_1,x_2,\cdots,x_n$惟一表示，即$x=\sum_{i=1}^{n}t_ix_i$，$t_1,t_2,\cdots,t_n$为数，$x\in X_1$. 定义$g\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{n}t_ic_i$，则$g$显然是$X_1$上的线性泛函，由题设可得

$$\left|g\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right)\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right\|.$$

所以，g是连续的，且$\|g\|_{X_1}\leqslant M$.

依定理可将g延拓为X上的连续线性泛函f，使得$\|f\|=\|g\|_{X_1}$，从而有

$$f(x_i)=g(x_i)=c_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

且$\|f\|=\|g\|_{X_1}\leqslant M$，故$f$满足条件(1)、(2).

例8　定义$\mathbf{R}^2$上线性泛函f为$f(x)=\alpha\xi_1+\beta\xi_2$，$x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2$，将$f$保范地延拓为$\mathbf{R}^3$上的连续线性泛函.

解　只需证明$\|f\|=\max(|\alpha|,|\beta|)$即可.

因为，对$x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2$，有

$$|f(x)|=|\alpha\xi_1+\beta\xi_2|\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|)\cdot\|x\|,$$

所以
$$\|f\|\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|).$$

又，若取$x=(\mathrm{sign}\alpha,0)$，则$\|x\|=1$，且$f(x)=|\alpha|$，所以$\|f\|\geqslant|\alpha|$. 类似可得$\|f\|\geqslant\beta$，所以

$$\|f\|\geqslant\max(|\alpha|,|\beta|).$$

综合以上两个不等式即得$\|f\|=\max(|\alpha|,|\beta|)$.

例9　设$\{x_\lambda\}$是赋范线性空间X中的一族元素，$y\in X$. 证明：y可以表示为族$\{x_\lambda\}$中元素线性组合的充要条件是：对任何集合$\{x_\lambda\}$上为零的连续线性泛函f，均有$f(y)=0$.

证　记族$\{x_\lambda\}$中元素线性组合全体为X_1，X_1是X的一个线性子空间.

充分性　用反证法证. 若y不能表示为X_1中某列元素的极

限，则 $d=\rho(y,X_1)$ 必大于零. 则由主要内容中的定理5知，存在 $f\in X^*$，使得 f 在 X 上恒为零. 但 $f(y)=d>0$. 即 $f\in X^*$ 适合一切 x_λ，使得 $f(x_\lambda)=0$，但 $f(y)\neq 0$，这与假设矛盾.

必要性 设 $f\in X^*$，且对任何 x_λ，有 $f(x_\lambda)=0$，由 f 的线性性知，f 在 X_1 上恒为零. 故，若 y 是 X_1 中 $\{z_n\}$ 的极限，可由 f 的连续性得

$$f(y)=\lim_{n\to\infty}f(z_n)=0.$$

例10 设 X 是有界实数列全体按普通线性运算构成的线性空间. 证明：存在 X 上的线性泛函 f，使得对任何 $x=(\alpha_n)\in X$，均有

$$\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant f(x)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\alpha_n.$$

证 在 X 上取泛函 $p(x)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n$，其中 $x=(\alpha_n)\in X$. 显然，p 具有非负齐性与次可加性，则依定理1，取 $L=\{\theta\}$ 为 X 的线性子空间，必存在 X 上的线性泛函 f，使得对一切 $x=\{\alpha_n\}\in X$，有 $f(x)\leqslant p(x)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

因为

$$f(-x)\leqslant p(-x),$$

所以
$$f(x)=-f(-x)\geqslant -p(-x),$$

则
$$-p(-x)=-\varlimsup_{n\to\infty}(-\alpha_n)=\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n,$$

从而，对于一切 $x=\{\alpha_n\}\in X$，有 $f(x)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 成立.

此例说明，对一般的实数列，不一定有极限存在，但必有介于上、下极限之间的线性泛函 f 存在.

例11 设定义在赋范空间 X 上的一个次可加泛函 f 在一个球面 $\{x\mid \|x\|=r\}$ 外是非负的，证明：对所有 $x\in X$，f 是非负的.

证 因为，对于满足 $\|x\|\leqslant r$ 的每个 $x\neq\theta$，必存在一个 $n\in\mathbf{N}$，使得 $\|nx\|=n\|\alpha\|>r$，所以，$f(nx)\geqslant 0$.

又 $P(nx)\leqslant nP(x)\Longrightarrow P(x)>0$.

从而，对于 $x=\theta$，有

$$P(\theta)\leqslant P(\theta)+P(\theta)\Longrightarrow P(\theta)\geqslant 0.$$

例 12 设 X 为赋范线性空间，$x,y\in X$. 若 $\forall f\in X^*$，恒有 $f(x)=f(y)$，证明：$x=y$.

证 用反证法证. 设 $x\neq y$，则 $x-y\neq\theta$. 依哈恩-巴拿赫定理，必存在 $f\in X^*$，使得

$$f(x-y)=\|x-y\|\neq 0,$$

从而知 $f(x)\neq f(y)$，这与题设矛盾. 故必有 $x=y$.

例 13 设 X 为赋范线性空间，S 为 X^* 中的单位球面，$x_0\in X$. 若对一切 $f\in S$，有 $|f(x_0)|\leqslant C$，证明：$|x_0|\leqslant C$.

证 由本节例 6 的结果知，当 X 是赋范线性空间时，对于任何 $x_0\in X$，必有

$$\|x_0\|=\sup\{|f(x_0)|\,|\,f\in S\}\leqslant C,$$

从而命题成立.

例 14 设 X_1 是实线性赋范空间 X 中含有内点的凸集，$x_0\overline{\in} X_1$，证明：存在 X 上的连续线性泛函 f，使得

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in X_1\}\leqslant 1\leqslant f(x_0).$$

证 考虑必要时作一平移，不妨设 θ 是 X_1 的一个内点. 则 $\forall x\in X_1$，必能取到 $0<\rho<\infty$，使 $x/\rho\in X_1$. 定义

$$p(x)=\inf\{\rho\,|\,\rho>0,x/\rho\in X_1\},$$

显然，p 是有非负性与可加性的泛函，且当 $x\in X_1$ 时，$p(x)\leqslant 1$.

先证 $p(x_0)>1$，用反证法证. 设 $p(x_0)<1$，则由 $p(x_0)$ 的定义，存在 $0<\rho<1$，使得 $x_0/\rho\in X_1$. 由题设条件知

$$x_0=\rho\cdot x_0/\rho+(1-\rho)\cdot 0\in X_1,$$

导出与题设 $x_0\overline{\in} X_1$ 矛盾. 故必有 $p(x_0)\geqslant 1$.

再证不等式成立. 在 $X_0=\{\alpha x_0\,|\,\alpha\in(-\infty,\infty)\}$ 上定义 $f_0(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$，则 f_0 显然是 X_0 上的线性泛函，且有 $f_0(x)\leqslant p(x)$，$x\in X_0$. 依定理 1，f_0 可以延拓为全空间 X 上的线性泛函 f，使得 $f(x)\leqslant p(x)$，$x\in X$，从而

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in X_1\}\leqslant\sup\{p(x)\,|\,x\in X_1\}\leqslant 1\leqslant p(x_0)=f(x_0).$$

最后补充证明 f 是连续的. 因为点 θ 是 X_1 的内点，所以存在 $\delta>0$，使得在 $\|x\|<\delta$ 时，$x\in X_1$，则 $\forall\ x\neq\theta$，有 $\frac{\delta}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|}\in X$. 于是，$p(x)\leqslant\frac{2}{\delta}\|x\|$ 对于 $x=\theta$ 也成立.

由 $f(x)\leqslant p(x)$ 及 $p(x)\leqslant\frac{2}{\delta}\|x\|$，得 $f(x)\leqslant\frac{2}{\delta}\|x\|$. 又由 $f(-x)=-f(x)$，得 $|f(x)|\leqslant\frac{2}{\delta}\|x\|$，$x\in X$. 从而，$f\in X^*$.

例 15 设 A 是赋范线性空间 X 中的凸闭集，$x_0\overline{\in}A$，证明：存在 X 上的连续线性泛函 f，使得

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}<f(x_0)$$

证 同例 14，考虑必要时作一平移，不妨设 $\theta\in A$（若 θ 不是 A 的内点，则可取一个比 A 稍大一点的凸集 A_1）. 取

$$\alpha=\inf\{\|x-x_0\|\,|\,x\in A\},$$

因为 $x_0\overline{\in}A$，所以 $\alpha>0$. 作

$$A_1=\{y\,|\,\|x-y\|\leqslant\alpha/2, x\in A\}.$$

对于 $x_0, y_0\in A_1$，可以取到 $x, y\in A$，使得

$$\|x-x_0\|\leqslant\alpha/2,\quad \|y-y_0\|\leqslant\alpha/2.$$

于是，对 $0\leqslant t\leqslant1$，有

$$\begin{aligned}&\|tx_0+(1-t)y_0-tx-(1-t)y\|\\&\leqslant t\|x-x_0\|+(1-t)\|y-y_0\|\leqslant\alpha/2\end{aligned}$$

成立. 而 $tx+(1-t)y\in A$，所以 $tx_0+(1-t)y_0\in A_1$，即 A_1 为凸集. 易见，θ 是 A_1 内点，$x_0\overline{\in}A_1$. 对 A_1 作泛函 p（称为闵可夫斯基泛函）

$$p(x)=\inf\{\rho\,|\,\rho>0, x/\rho\in A_1\},$$

由本节例 14 知，存在 $f\in X^*$，使得 $f(x_0)=p(x_0)\geqslant1$，且对于一切 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant p(x)$. 从而

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}\leqslant\sup\{p(x)\,|\,x\in A\}\leqslant1.$$

若 $p(x_0)=1$，则必存在一列 $\rho_n\geqslant1$，使得 $x_0/\rho_n\in A_1$，且 $\rho_n\to1$，从而 $x_0/\rho_n\to x_0$. 但是，$\rho(x_0,A)=\alpha$，而 $\rho(x_0,A_1)=\alpha/2>0$，显然与

$x_0/\rho_n \to x_0$ 矛盾. 所以,必 $p(x_0) \neq 1$,即 $f(x_0)=p(x_0)>1$. 于是

$$\sup\{f(x) \mid x \in A\} < f(x_0).$$

例 16 设 X 是实数域(或复数域)K 上的赋范线性空间,证明:若 X 为无限维空间,则 X^* 也是无限维的.

证 任取非零元 $x_1 \in X$,则依定理 1 可取到 $f_1 \in X^*$,使得 $f(x_1)=\|x_1\| \neq 0$.

取 $X_1=\{\alpha_1 x_1 \mid \alpha_1 \in K\}$,则 X_1 是 X 的闭子空间. 故可取到 $x_2 \overline{\in} X_1$,并记 $d_2=\rho(x_2,X_1)$,有 $d_2>0$. 依定理 5,可取到 $f_2 \in X^*$,使得 $f_2|_{X_1}=0$,$f(x_2)=d_2>0$.

如此继续,可以取到 $x_3, f_3, \cdots$.

在取到 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_{n-1}$ 后,对于 $i<n-1$,可记 $X_i=\{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_i x_i \mid \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i \in K\}$, $f_{i+1}|_{X_i}=0$, $f_{i+1}(x_{i+1}) \neq 0$. 此时,再取 $X_{n-1}=\{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_{n-1}x_{n-1} \mid \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1} \in K\}$. X_{n-1} 是 X 的闭子空间,可取到 $x_n \overline{\in} X_{n-1}$,$d_n=\rho(x_n,X_{n-1})>0$,故依定理 5 可取 $f_n \in X^*$,使得 $f_n|_{X_{n-1}}=0$,$f_n(x_n) \neq 0$. 这样,得到 X^* 中一列元素 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$.

用反证法证明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 必线性无关.

设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性相关,则存在 n 个不全为零的数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,使得 $\beta_1 f_1+\beta_2 f_2+\cdots+\beta_n f_n=0$,于是

$$\beta_1 f_1(x_1)+\beta_2 f_2(x_1)+\cdots+\beta_n f_n(x_1)=0.$$

但已知 $f_2(x_1)=f_3(x_1)=\cdots=f_n(x_1)=0, \quad f_1(x_1) \neq 0.$

从而必有 $$\beta_1=0.$$

类似可得 $\beta_2=0,\cdots,\beta_n=0$. 于是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 必线性无关.

从以上例题可以看到,在命题的证明过程中经常要利用定义、定理. 因此,要求读者必须熟悉定义与定理.

例 17 P 是定义在赋范线性空间 X 上的一个次线性泛函,证明:X 上存在一线性泛函 F,使得 $-P(-x) \leqslant F(x) \leqslant P(x)$.

证 对例 4 中的 f,利用哈恩-巴拿赫定理,可以得到 X 上的线

性泛函F，且满足$F(x)\leqslant P(x)$. 因

$$-F(x)=F(-x)\leqslant P(-x)\Rightarrow -P(-x)\leqslant F(x),$$

故
$$-P(-x)\leqslant F(x)\leqslant P(x).$$

例18 设X是复向量空间，于是f是复值的，$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$是复值的，若令$F(x)=F_1(x)-\mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)$，证明：$F$是$X$上一线性泛函.

证 因为F_1是实向量空间X上的线性泛函，由$F(x)=F_1(x)-\mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)$，对于任意复数$a+\mathrm{i}b$，其中$a$和$b$是实数，均有

$$\begin{aligned}F[(a+\mathrm{i}b)x]&=F_1(ax+\mathrm{i}bx)-\mathrm{i}F_1(\mathrm{i}ax-bx)\\&=aF_1(x)+bF_1(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}[aF_1(\mathrm{i}x)-bF_1(x)]\\&=(a+\mathrm{i}b)[F_1(x)-\mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)]=(a+\mathrm{i}b)F(x),\end{aligned}$$

所以，F是X上一线性泛函.

例19 设Y为赋范线性空间X的闭线性子空间，且对于$f\in X^*$，当$f|_y=0$时，必有$f=0$，证明：$X=Y$.

证 用反证法证. 设$X\neq Y$，则存在$x_0\in X\backslash Y$. 由Y是闭子空间知，$\rho(x_0,y)>0$. 由主要内容中的定理5知，存在$f\in X^*$，使$f|_y=0$，$f(x_0)=\rho(x_0,y)$，且$\|f\|=1$，导出与题设条件的矛盾，故必$X=Y$.

例20 设M为赋范线性空间X中任一子集，x_0为X中某非零元，证明$x_0\in\overline{\mathrm{span}M}$的充要条件是：$\forall f\in X^*$，若$\forall x\in M$成立$f(x)=0$，则$f(x_0)=0$.

证 必要性 若$x_0\overline{\in}\overline{\mathrm{span}M}$，则可取$f\in X^*$，使得$f|_{\overline{\mathrm{span}M}}=0$，但$f(x_0)=\rho(x_0,\overline{\mathrm{span}M})>0$，导出矛盾.

充分性 若$x_0\in\overline{\mathrm{span}M}$，则存在$\{x_n\}\subset\mathrm{span}M$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$. 若$f\in X^*$，$f|_M=0$，则有$f|_{\mathrm{span}M}=0$，故由$f$的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

第四节　共轭空间与共轭算子

主 要 内 容

1. 设X是赋范线性空间，则其共轭空间X^*也是赋范线性空间，也有共轭空间$(X^*)^*$，记为X^{**}，称为X的**二次共轭空间**. 如此继续，还有$X^{***}=(X^{**})^*$，$X^{****}=(X^{***})^*$，….

$\forall x\in X$，作X^*上的泛函x^{**}：对于$f\in X^*$，令$x^{**}(f)=f(x)$，则x^{**}是X^*上的有界线性泛函，且$\|x^{**}\|\leqslant\|x\|$，称泛函x^{**}是由x**生成的**. 又称$X\to X^{**}$的算子$x\mapsto x^{**}$为**嵌入算子**.

2. **定理1**　设X是赋范线性空间，嵌入算子$x\mapsto x^{**}(x\in X)$是$X\to X^{**}$的保范(等距)线性算子，即

(1) $(\alpha x+\beta y)^{**}=\alpha x^{**}+\beta y^{**}$；

(2) $\|x^{**}\|=\|x\|$.

3. **定义1**　设X是赋范线性空间，若$X=X^{**}$，则称X是**自反的**.

4. **定理2**　设X是赋范线性空间，若X^*是可分的，则X也是可分的.

5. **定义2**　设X,Y都是赋范线性空间，如果$A_n\in B(X\to Y)$，$A\in B(X\to Y)$，且$\|A_n-A\|\to 0\ (n\to\infty)$，则称$\{A_n\}$**按算子范数收敛**于$A$(或称**一致收敛**于$A$). 若$\forall x\in X$，$\|(A_n-A)x\|\to 0(n\to\infty)$，则称$\{A_n\}$**强收敛**于$A$，记做$A_n\xrightarrow{\text{强}}A$，或$A=(\text{强})\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 若$\forall x\in X$，以及任何$f\in Y^*$，$f(A_nx)\to f(Ax)$，则称$\{A_n\}$**弱收敛**于$A$，记做$A_n\xrightarrow{\text{弱}}A$或$A=(\text{弱})\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

若$\{A_n\}$一致收敛于A，则必强收敛于A；若$\{A_n\}$强收敛于A，则必弱收敛于A. 但逆命题一般不成立.

6. **定理3**　设X是赋范线性空间，Y是巴拿赫空间，$T_n\in B(X$

$\to Y)$，$n=1,2,\cdots$. 若存在常数M，使得$\|T_n\|<M$，$n=1,2,\cdots$，且有稠密子集$D\subset X$，当$x\in D$时，$\{T_nx\}$收敛，则必存在线性有界算子$T\in B(X\to Y)$，使得$\{T_n\}$强收敛于T，且

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

7. **定义3** 设$\{f_n\}$是赋范线性空间X上一列连续线性泛函，若有$f\in X^*$，使得$\|f_n-f\|\to 0\quad(n\to\infty)$，则称$\{f_n\}$**强收敛**于$f$，记做$f_n\to f$或$f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$；若$\forall\ x\in X$，$f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$，则称$\{f_n\}$**弱*收敛**于$f$，记做$f_n\xrightarrow{弱^*}f$或$f=(弱^*)\lim\limits_{n\to\infty}f_n$.

定义4 设X是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$，如果$|x_n-x_0|\to 0\quad(n\to\infty)$，则称$\{x_n\}$**强收敛**于$x_0$，记做$x_n\xrightarrow{强}x_0$；如果对任何$f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$，则称$\{x_n\}$弱收敛于$x_0$，记做$x_n\xrightarrow{弱}x_0$或$x_0=(弱)\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. **定理4** 设X,Y是赋范线性空间，$\{A_n\}\subset B(X\to Y)$，若$\{A_n\}$弱收敛于$A\in B(X\to Y)$，则A是惟一的. 特别地，若$\{f_n\}$是X上一列线性有界泛函弱收敛于f，则f是惟一的.

9. **定义5** 设Φ是X的共轭空间X^*的子集，若Φ中任意点列$\{f_n\}$一定含有X上弱*收敛子序列$\{f_{n_k}\}$，则称Φ是**弱*致密或列紧**的；若必含强收敛子序列$\{f_{n_k}\}$，则称Φ是**强致密的(或致密的)**.

定理5 若赋范线性空间X是可分的，则共轭空间X^*中的任意有界集E是弱*致密的.

10. **定义6** 设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性有界算子，若有Y^*到X^*的算子T^*，使得对于任何$h\in Y^*$，$x\in X$，有

$$(T^*f)(x)=f(Tx),$$

则称T^*是T的**共轭算子**(又称**伴随算子**).

定理6 设X,Y是赋范线性空间，则

(1)$\forall\ T\in B(X\to Y)$，必有惟一的共轭算子$T^*\in B(Y^*\to$

X^*)，且 $\|T^*\|=\|T\|$；

(2)映射 $T\mapsto T^*$ 是由 $B(X\to Y)$ 到 $B(Y^*\to X^*)$ 的保范线性算子；

(3)$I_{X^*}=I_X^*$，其中 I_{X^*} 与 I_X^* 分别是 X 和 X^* 上的恒等算子；

(4)设 Z 是赋范线性空间，$S\in B(Y\to Z)$，则

$$T^*S^*=(ST)^*.$$

疑难解析

1. 若 $\{A_n\}$ 一致收敛于 A，则必强收敛于 A；若 $\{A_n\}$ 强收敛于 A，则必弱收敛于 A. 其逆命题是否成立？

答 逆命题一般不成立. 例如，在 l^p $(p\geqslant 1)$ 中作"左移位"算子 A 如下：对于 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$，令 $Ax=(x_2,x_3,\cdots)$，则算子序列 $\{A^n\}$ 强收敛于零，但不一致收敛于零.

因为对于任何 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，有 $A^nx=(x_{n+1},x_{n+2},\cdots)$，所以，$\|A^nx\|_p=\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}$. 由于 $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}<\infty$，故 $\|A^nx\|_p\to 0$，即 $\{A_n\}$ 强收敛于零. 但若令 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots)$，则 $A^ne_{n+1}=e_1$，有 $\|A_n\|\geqslant\|A^ne_{n+1}\|_p/\|e_{n+1}\|=1$，即知 $\{A^n\}$ 不一致收敛于零.

又如，在 l^p $(p>1)$ 中作算子序列 $\{A_n\}$ 如下：当 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$ 时，$A_nx=x_1e_n$，$n=1,2,\cdots$，则 $\{A_n\}$ 是弱收敛但不强收敛的.

因为当 $n\neq m$ 时，有

$$\|A_nx-A_mx\|_p=\|x_1e_n-x_1e_m\|=|x_1|2^{1/p},$$

所以，当 $x_1\neq 0$ 时，$\{A_nx\}$ 不是基本点列，更不是收敛点列，从而 $\{A_n\}$ 不是强收敛的. 同时，对于 l^p 上任何连续线性泛函 f，即 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^q$，且 $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_iy_i$，则

$$y(A_nx)=y(x_1e_n)=x_1y_n.$$

由于$\sum|y_n|^q<\infty$，因而$y(A_nx)\to 0$，即$\{A_n\}$弱收敛于零. 这里

$$1/p+1/q=1.$$

2. 弱*收敛与弱收敛有何不同？

答 如果X是赋范线性空间，X^*是其共轭空间，$\{f_n\}\subset X$，$f\in X$，那么：

(1)若$\|f_n-f\|\to 0$，则称$\{f_n\}$强收敛于f，记做$f_n\xrightarrow{强}f$；

(2)若$\forall\ x\in X$，都有$|f_n(x)-f(x)|\to 0$，则称$\{f_n\}$弱*收敛于f，记做$f_n\xrightarrow{弱^*}f$.

泛函序列的弱*收敛与把它作为赋范线性空间中点列的弱收敛是不同的，因为

$f_n\xrightarrow{弱^*}f$是指$F(f_n)-F(f)\to 0, F\in X^{**}$，

$f_n\xrightarrow{弱}f$是指$f_n(x)-f(x)\to 0, x\in X$，

即
$$x^{**}(f_n)\to x^{**}(f)\to 0,\ x^{**}\in\widehat{X},$$

其中，$x^{**}(f)=f(x), f\in X^*$，$\widehat{X}=\{x^{**}|x\in X\}$. 一般地，$\widehat{X}$只是$X^{**}$的一个子空间，不一定有$X^{**}=\widehat{X}$，所以，弱*收敛要比弱收敛更弱一些.

要注意区分强收敛、弱收敛与弱*收敛.

方法、技巧与典型例题分析

要求认真理解共轭空间与二次共轭空间概念，了解共轭算子及其性质，熟悉赋范线性空间中点列与泛函序列的一致收敛、强收敛与弱收敛概念，并能利用它们证明一些有关命题.

例1 证明：

(1)$(S+T)^*=S^*+T^*$； (2)$(\alpha T)^*=\alpha T^*$；

(3)$(ST)^*=T^*S^*$； (4)$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

证 (1)$((S+T)^*g)(x)$

$$=g((S+T)x)=g(Sx)+g(Tx)$$

$$=(S^*g)(x)+(T^*g)(x)=((S^*+T^*)g)(x),$$

$$\forall\ x\in X,\ g\in Y^*,$$

故 $(S+T)^*g=(S^*+T^*)g\Longrightarrow(S+T)^*=S^*+T^*,\forall\ g\in Y^*.$

(2)$\forall\ x\in X$ 和 $g\in Y^*$,

$$((\alpha T)^*g)(x)=g((\alpha T)x)=g(\alpha Tx)=\alpha g(Tx)=\alpha(T^*g)(x),$$

故 $$(\alpha T)^*=\alpha T^*.$$

(3)$((ST)^*g)(x)=g(STx)=(S^*g)(Tx)$

$$=(T^*(S^*g))(x),$$

故 $$(ST)^*=T^*S^*.$$

(4)由 $(T^{-1})^*:X^*\to Y^*$ 存在和 $T^{-1}T=I_X$,可得

$$(T^{-1}T)^*=T^*(T^{-1})^*=I_{X^*}.$$

由 $TT^{-1}=I_Y$ 得 $(T^{-1})^*T^*=I_{Y^*}$,故 $T^*:Y^*\to X^*$ 是双射,$(T^*)^{-1}$ 存在,有

$$(T^{-1})^*=(T^{-1})^*T^*(T^*)^{-1}=(T^*)^{-1}.$$

例2 设 X,Y 是赋范线性空间,$T:X\to Y$ 是一有界线性算子,$M=\overline{R(T)}$ 是 T 的值域的闭包,证明:$M^a=N(T^*)$.

证 因为,若 $M\neq\varnothing$ 是赋范线性空间 X 的任意子集,则称

$$M^a=\{f\in X^*\mid f(x)=0,\forall\ x\in M\}$$

为 M 的零化子. 若 $f,g\in M^a$,则 $\alpha f+\beta g\in M^a$,所以 M^a 是向量子空间. 若 $f\in M^a$,则存在 $f_n\in M^a$,使得 $f_n\to f$. $\forall\ x\in M^a$,有

$$f_n(x)=0,\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n-f|\ \|x\|\to 0,$$

从而 $f\in M^a$,所以 M^a 是闭集.

由于 $$g\in M^a\Longleftrightarrow(T^*g)(x)=g(Tx)=0,$$

故 $\forall\ x\in X$,有 $$T^*g=0\Longleftrightarrow g\in N(T^*).$$

例3 设 B 是赋范线性空间 X 的对偶空间 X^* 的子集,B 的零化子定义为 ${}^aB=\{x\in X\mid f(x)=0,f\in B\}$,证明:在例 2 中,$R(T)\subset{}^aN(T^*)$,方程 $Tx=y$ 有解的条件是什么?

证 $\forall\ y\in R(T),\exists\ x\in X$,使得 $y=Tx$. 令 $g\in N(T^*)$,则 $g(y)=g(Tx)=(T^*g)(x)=0$,于是 $y\in{}^aN(T^*)$. 由 y 的任意性,

所以$R(T)\subset^a N(T^*)$，而方程$Tx=y$有解x的必要条件是，对于所有的$g\in N(T^*)$，有$g(y)=0$.

例4 设X为赋范线性空间，嵌入算子τ定义为$X\to X^{**}$，$x\to x^{**}$，其中$x^{**}(t)=f(x)$对于一切$f\in X^*$成立. 当$\tau(X)=X^{**}$时，称X为自反的. 证明：对于巴拿赫空间X，X为自反空间的充要条件是X^*为自反的.

证 因为$\tau(x)=X^{**}$，$x^{**}(f)=f(x)$，其中$x\in X$，$f\in X^*$. 类似地，记$X^*\to X^{***}$的嵌入算子为τ'.

必要性 要证X^*自反，只需证τ'是满射即可. 设$x_0^{***}\in X^{***}$，作X上的泛函$x_0^*(x)=x_0^{***}(\tau(x))$，显然，$x_0^*\in X^*$. 因为$X$自反，则可取$x\in X$，使得$\tau(x)=x^{**}$，于是

$$\tau'(x_0^*)(x^{**})=x^{**}(x_0^*)=\tau(x)(x_0^*)=x_0^*(x)$$
$$=x_0^{***}(\tau(x))=x_0^{***}(x^{**}).$$

即对任何$x^{**}\in X^{**}$，有$\tau'(x_0^*)(x^{**})=x_0^{***}(x^{**})$，亦即$\tau'(x_0^*)=x_0^{***}$，从而$\tau'$是满射，$X^*$自反.

充分性 用反证法证. 设X^*自反，而X不自反，即闭子空间$\tau(X)\neq X^{**}$，则由哈恩-巴拿赫定理，存在非零元$x_0^{***}\in X^{***}$，使得$x_0^{***}(\tau(x))=0$对于一切$x\in X$都成立. 因为，若有$x_0^*\in X^*$，使得$\tau'(x_0^*)=x_0^{***}$，则

$$x_0^*(x)=\tau(x)(x_0^*)=x_0^{***}(\tau(x))=0,$$

故$x_0^*=0$，从而$x_0^{***}=\tau'(x_0^*)=0$，导出矛盾. 所以X必自反.

例5 设Y是赋范线性空间X的真闭子空间，任取$x_0\in X\backslash Y$，令$\delta=\inf\limits_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\|$表示$x_0$到$Y$的距离，证明：存在一$F\in X^*$，使得$\|F\|=1$，且对于所有的$y\in Y$，有$F(y)=0$，$F(x_0)=\delta$.

证 考虑由Y与x_0张成的子空间$Z\subset X$. 在Z上定义有界线性泛函f为

$$f(z)=f(y+\alpha x_0)=\alpha\delta,$$

证明f满足$\|f\|=1$，再用哈恩-巴拿赫定理将f延拓到X上，即

得满足条件的F.

对于每个$z\in Z=\mathrm{span}(Y\cup\{x_0\})$有惟一表示式：$z=y=\alpha x_0$，$f$为线性是显然的. 因为$Y$是闭的，所以$\delta>0$，$f\neq 0$. 当$\alpha=0$时，$\forall\ y\in Y$，$f(y)=0$. 对于$\alpha=1$与$y=0$，有$f(x_0)=\delta$.

以下证明f有界. 当$\alpha=0$时，得$f(z)=0$. 令$\alpha\neq 0$，由题设条件并注意到$(-1/\alpha)y\in Y$，得

$$|f(z)|=|\alpha|\delta=|\alpha|\inf_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\|$$
$$\leqslant|\alpha|\ \|-y/\alpha-x_0\|=\|y+\alpha x_0\|,$$

即$|f(z)|\leqslant\|z\|$，故f有界且$\|f\|\leqslant 1$.

又根据下确界定义，Y必包含一序列$\{y_n\}$，使得$\|y_n-x_0\|\to\delta$. 令$z_n=y_n-x_0$，则$f(z_n)=-\delta$，且

$$\|f\|=\sup_{z\in Z,z\to 0}\frac{|f(z)|}{\|z\|}\geqslant\frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|}=\frac{\delta}{\|z_n\|}\to\frac{\delta}{\delta}=1,$$

即
$$\|f\|\geqslant 1.$$

综合以上两不等式得$\|f\|=1$.

例6 设赋范线性空间X的共轭空间X^*是可分的，证明：X是可分的.

证 设X^*是可分的，则单位球面$U^*=\{f|\ \|f\|=1\}\subset X^*$也包含一稠密子集$\{f_n\}$，因而$f_n\in U^*$，有

$$\|f_n\|=\sup_{\|x\|=1}|f_n(x)|=1.$$

依上确界的定义，必可找到$\|x_n\|=1$的点$x_n\in X$，使得$|f_n(x_n)|\geqslant 1/2$. 令$Y=\overline{\mathrm{span}(x_n)}$，因为$Y$有一可数的稠密子集，即系数的实部与虚部均是有理数的x_0的所有线性组合的集合，所以Y是可分的.

现在用反证法证明$Y=X$. 设$Y\neq X$，则因为Y是闭的，则依例5，存在$F\in X^*$，$\|F\|=1$. 对于所有的$y\in Y$，有$F(y)=0$. 因为$x_n\in Y$，则$F(x_n)=0$，且对于所有的n，有

$$1/2\leqslant|f_n(x_n)|=|f_n(x_n)-F(x_n)|$$
$$=|(f_n-F)(x_n)|\leqslant\|f_n-F\|\cdot\|x_n\|.$$

而 $\| x_n \| = 1$，所以 $\| f_n - F \| \geqslant 1/2$，导出与 $\{f_n\}$ 在 U^* 中稠密矛盾．于是 $Y = X$，即 X 是可分的．

例 7 在例 5 的假设下，证明：X 上存在一有界线性泛函 h，使得

$$\| h \| = 1/\delta, \ \forall \ y \in Y$$

有
$$h(y) = 0, \quad h(x_0) = 1.$$

证 令 $h = F/\delta$，由于 $\| F \| = 1$，所以 $\| h \| = 1/\delta$．$\forall \ y \in Y$，因为 $F(y) = 0$，所以 $h(y) = 0$，且

$$h(x_0) = F(x_0)/\delta = \delta/\delta = 1.$$

例 8 设 M 是赋范线性空间的任意子集，证明：$x_0 \in X$ 为 $A = \overline{\mathrm{span} M}$ 的一个元素的充要条件是：对于使得 $f|_M = 0$ 的每个 $f \in X^*$，有 $f(x_0) = 0$.

证 必要性 若 $x_0 \in A$，则必有序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{span} M$，使得 $x_n \to x_0$，对于满足 $f|_M = 0$ 的每个 $f \in X^*$，有 $f(x_0) = 0$．由于 f 是连续的，所以

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0.$$

充分性 用反证法证．设 $x_0 \overline{\in} A$，则依例 5，存在 $F \in X^*$，使得 $F|_A = 0$，$F(x_0) \neq 0$，从而与题设矛盾，故必 $x_0 \in A$.

例 9 设赋范线性空间 X 有一包含 n 个元素的线性无关子集，证明：在共轭空间 X^* 中也有这样的集．

证 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 X 中的线性无关集，则依例 7，在 X 上存在 n 个有界线性泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，使得

$$f_i(x_i) = 1, f_i(x_k) = 0 \ (k \neq i).$$

若 $\sum_{i=1}^{n} r_i f_i = 0$，则 $\forall \ x \in X$，有 $\sum_{i=1}^{n} r_i f_i(x) = 0$，分别取 $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$，可得 $r_i = 0$，可知集 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 在 X^* 上线性无关．命题得证．

例 10 设 X 为赋范线性空间，$M \subset X^*$，证明：

$$M^{\perp} = \{x \mid f \in X^*, f(x) = 0, \text{对于一切 } f \in M \text{ 成立}\}$$

为 X^* 的闭子空间.

证 设 $\{f_n\}\subset M^{\perp}, f_n\to f\in X^*$，则 $\forall\ x\in M$，有

$$f_n(x)=0,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

所以 $f\in M^{\perp}$，即 $M^{\perp}$ 是 X^* 的闭子空间.

例 11 设 X 为赋范线性空间，$M\subset X^*$，证明：

$$M_{\perp}=\{x\mid x\in X, f(x)=0, \text{对一切 } f\in M \text{ 成立}\}$$

为 X 中的闭子空间.

证 设 $\{x_n\}\subset M_{\perp}, x_n\to x\in X$，则 $\forall\ f\in M$，有

$$f(x_n)=0,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0,$$

所以 $x\in M_{\perp}$，即 $M_{\perp}$ 是 X 的闭子空间.

例 12 若 $x_n\in C[a,b]$，且 $x_n\xrightarrow{\text{弱}}x\in C[a,b]$，证明：$\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上是逐点收敛的，即对每个 $t\in[a,b]$，$\{x_n(t)\}$ 收敛.

证 首先，对于固定的 $t_0\in[a,b]$，在 $C[a,b]$ 上定义有界线性泛函 δ_{t_0}，有 $\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$.

由 $x_n\xrightarrow{\text{弱}}x$，则 $\delta_{t_0}(x_n)\to\delta_{t_0}(x)$，即 $x_n(t_0)\to x(t_0)$. 因此，$\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上是逐点收敛的.

例 13 设 $X=l^2, e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots), n=1,2,\cdots$，证明：$\{e_n\}$ 不强收敛于 θ，而 $e_n\xrightarrow{\text{弱}}\theta$.

证 因为 $\|e_n\|=1$，所以 $\{e_n\}$ 不强收敛于 0.

又由 $(l^2)^*=l^2$，即 $\forall\ f\in X^*$，存在 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$，使得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\eta_n,\quad x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

于是 $f(e_n)=\eta_n\to 0\ (n\to\infty)$，即 $e_n\xrightarrow{\text{弱}}\theta$.

例 14 设有 $L^1[0,2\pi]$ 上的泛函序列 $\{f_n\}$，

$$f_n(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t,\quad x\in L^1[0,2\pi],$$

证明：$f_n\xrightarrow{\text{弱}^*}0$，但 $\{f_n\}$ 并不强收敛于 0.

证 因为 $\|f_n\| = \max\limits_{t\in[0,2\pi]} |\sin nt| = 1$，所以$\{f_n\}$并不强收敛于0.

当x是三角多项式时，由分部积分可得

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} x'(t)\cos nt\mathrm{d}t \to 0, \ n\to\infty.$$

由于$\|f_n\| = 1$及三角多项式全体在$L^1[0,2\pi]$中的稠密性，立即得到，对于任何$x\in L^1[0,2\pi]$，有

$$f_n(x) = \int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\mathrm{d}t \to 0 \ (n\to\infty).$$

例15 设X,Y是赋范线性空间，$T\in B(X,Y)$，$\{x_n\}$是X中一点列，若$x_n \xrightarrow{弱} x_0$，证明：$Tx_n \xrightarrow{弱} Tx_0$.

证 任取$h\in Y^*$，定义f为

$$f(x) = h(Tx), \ x\in X,$$

则f线性是显然的. 因为$h\in Y^*$，且T有界，有

$$|f(x)| = |h(Tx)| \leqslant \|h\| \ \|Tx\| \leqslant \|h\| \ \|T\| \ \|x\|.$$

所以$f\in X^*$. 又因为

$$x_n \xrightarrow{弱} x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0),$$

即$h(Tx_n)\to h(Tx)$，而h是任意的，从而$Tx_n \xrightarrow{弱} Tx$.

例16 设$\varepsilon_n = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots)\in l^1$，证明：

$$\varepsilon_n \xrightarrow{弱^*} \theta，但\ \varepsilon_n \xrightarrow{弱} \theta\ 不成立.$$

证 因为$l^1 = (C_0)^*$，而$\forall\ x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in C_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，所以$e_n(x) = x_n \to 0\ (n\to\infty)$，即$e_n \xrightarrow{弱^*} \theta$.

但是$(l^1)^* = l^\infty$，取$f = (1,1,\cdots,1,\cdots)\in l^\infty$，则

$$f(e_n) = 1, \ n = 1,2,\cdots.$$

所以$f(e_n) \not\to 0(n\to\infty)$，即$e_n \overset{弱}{\not\to} \theta$.

例17 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是赋范线性空间中的两个序列，证明：

$$x_n \xrightarrow{弱} x, y_n \xrightarrow{弱} y \Rightarrow x_n + y_n \xrightarrow{弱} x+y\ 和\ \alpha x_n \xrightarrow{弱} \alpha x,$$

其中 α 是任意数.

证 因为 $f\in X^*$ 是线性的，所以由 $x_n \xrightarrow{弱} x, y_n \xrightarrow{弱} y$，有

$$f(x_n+y_n)=f(x_n)+f(y_n)\to f(x)+f(y)=f(x+y),$$

$$f(\alpha x_n)=\alpha f(x_n)\to \alpha f(x)=f(\alpha x),$$

即
$$x_n+y_n \xrightarrow{弱} x+y, \alpha x_n \xrightarrow{弱} \alpha x.$$

例 18 在赋范线性空间 X 中，若 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$，证明：$x_0\in\overline{Y}$，其中 $Y=\mathrm{span}\{x_n\}$.

证 用反证法证. 设 $x_0\overline{\in}\overline{Y}$，则依例5，存在一 $F\in X^*$，使得 $\forall\ y\in\overline{Y}$，有

$$F(y)=0, \quad F(x_0)=\delta=\inf_{y\in Y}\|y-x_0\|>0.$$

所以 $\{F(x_n)\}$ 不收敛于 $F(x_0)$，导出与 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$ 矛盾. 从而必有 $x_0\in\overline{Y}$.

例19 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的弱收敛序列，证明：存在一个由 $\{x_n\}$ 的元素线性组合构成的序列 $\{y_m\}$，$y_m \xrightarrow{强} x_0$.

证 令 $Y=\mathrm{span}\{x_n\}$，则依例18，$x_0\in\overline{Y}$. 由闭包的概念，存在 Y 中的序列 $\{y_m\}$，使得 $y_m \xrightarrow{强} x_0$. 因为 $y_m\in Y=\mathrm{span}\{x_n\}$，所以 y_m 是 $\{x_n\}$ 元素的线性组合.

还可以证明：l^1 中任何弱收敛的点列必是强收敛的.（证明比较复杂，略.）

例 20 设 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n\|<+\infty$，证明：

$$\|x_0\|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n\|.$$

证 $\forall\ f\in X^*$，有 $f(x_n)\to f(x_0)$，于是

$$\begin{aligned}\|x_0\| &= \sup_{\|f\|=1}|f(x_0)| = \sup_{\|f\|=1}\left|\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right| \\ &\leqslant \sup_{\|f\|=1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f\|\ \|x_n\| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n\|.\end{aligned}$$

例21 在实（或复）的赋范线性空间 X 中的弱柯西点列，是指

对 X 中的点列$\{x_n\}$，$\forall\ f\in X^*$，序列$\{f(x_n)\}$是$\mathbf{R}$ 或$\mathbf{C}$ 中的柯西序列($\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$)．证明：弱柯西点列是有界的．

证 设$\{x_n\}$是弱柯西序列，定义$g_n\in X^{**}$为$g_n(f)=f(x_n)$．因为$\{f(x_n)\}$是柯西序列，所以是有界的，即

$$|f(x_0)|=|g_n(f)|\leqslant c.$$

由于X^*是完备的，则由有界性定理可得

$$\|x_n\|=\|g_n\|\leqslant c.$$

例22 如果赋范线性空间X 中的每个弱柯西序列在X 中是弱收敛的，则称X 是弱完备的．证明：若X 是自反的，则X 是弱完备的．

证 设$\{x_n\}$是X 中任意弱柯西序列，则$\forall\ f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$均收敛，对于$x_n\in X$，存在$g_n\in X^{**}$，使得$g_n(f)=f(x_n)$，所以$\{g_n(f)\}$也收敛，即 $g_n(f)\to g(f)$．由例 21 知，$\{x_n\}$有界，且$\|g_n\|=\|x_n\|$．于是

$$\|g(f)\|\leqslant\|g(f)-g_n(f)\|+\|g_n(f)\|\leqslant\varepsilon+c\|f\|.$$

取$\varepsilon=\|f\|$，当$n>N$ 时，有

$$\|g(f)\|\leqslant(1+c)\|f\|,$$

从而知f 有界．而由定义$g(f)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(f)$知，$g$ 是线性的，从而$g\in X^{**}$．又由X 是自反的，必存在$x\in X$，使得$\forall\ f\in X^*$，有$g(f)=f(x)$．所以$f(x_n)\to f(x)$，即$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x$．由$\{x_n\}$的任意性知，$X$ 是弱完备的．

例23 设X 是可分的赋范线性空间，M 是X^*中的有界集，证明：M 中每个点列含有弱*收敛的子列．

证 对M 中的任一有界点列$\{f_n\}$，存在常数C，使得$\|f_n\|\leqslant C$ $(n=1,2,\cdots)$．取X 中稠密点列$\{x_n\}$．因为$|f_n(x_1)|\leqslant C\|x_1\|$ $(n=1,2,\cdots)$，所以有$\{n_k^1\}\subset\{n\}$，使得$\{f_n(x_1)\}$的子列$\{f_{n_k^1}(x_1)\}$收敛．

类似地，有$\{f_{n_k^2}(x_2)\}$，$\{f_{n_k^3}(x_3)\}$，$\cdots$收敛．即得子列$\{n_k^l\}\subset\{n_k^{l-1}\}$，且对$j\leqslant 1$，$\{f_{n_k^l}(x_j)\}$收敛．

考察$\{n_k^k\}$，对任何 j，$\{f_{n_k^k}(x_j)\}$收敛．由于$\{x_j\}$在 X 中稠密，$\| f_{n_k^k} \| \leqslant C$ $(k=1,2,\cdots)$，故知点列$\{f_{n_k^k}(x)\}$关于一切 $x\in X$ 均收敛．

例24 若$S_n,T_n\in B(X\to Y)$，且$\{S_n\}$与$\{T_n\}$分别强收敛于S 和 T，证明：$\{S_n+T_n\}$强收敛于$S+T$．

证 因为，$\forall x\in X$，有

$$\| (S_n+T_n)x-(S+T)x \|$$
$$\leqslant \| S_nx-Sx \| + \| T_nx-Tx \| \to 0 \ (n\to\infty),$$

因此，S_n+T_n 强收敛于$S+T$．

例25 证明：弱收敛$\Longrightarrow$弱*收敛．若X 是自反的，其逆也成立．

证 设$\{f_n\}\subset X^*$，且 $f_n \xrightarrow{弱} f$，则$\forall g\in X^{**}$，有 $g(f_n)\to g(f)$，且$\forall x\in X$，$\exists g_x\in X^{**}$，$f_n(x)=g_x(f_n)\to g_x(f)=f(x)$，即 $f_n \xrightarrow{弱} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{弱^*} f$.

若X 是自反的，即$\forall g\in X^{**}$，$\exists x\in X$，使得$f(x)=g(f)$对任意 $f\in X^*$ 均成立．因此，弱*收敛：$f_n \xrightarrow{弱^*} f \Longrightarrow g(f_n)-g(f)=f_n(x)-f(x)\to 0$.

例26 设$T_n\in B(X\to Y)$，$n=1,2,\cdots$，证明：$T_n\to T$ 当且仅当 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$(只依赖ε)，使得对所有$n>N$ 和所有范数为1的$x\in X$，有

$$\| T_nx-Tx \| <\varepsilon.$$

证 必要性 设$T_n\to T$，且$\| x \| =1$，则由

$$\| T_nx-Tx \| \leqslant \| T_n-T \| \ \| x \| = \| T_n-T \| \to 0$$

知，$\forall \varepsilon>0$，总存在N，使得对于所有$n>N$ 和所有范数为1的$x\in X$，有$\| T_nx-Tx \| <\varepsilon$.

充分性 若题中条件成立，则

$$|T_ny-Ty|<\varepsilon \quad (n>N, \| y \| =1).$$

对于任意固定的$x\neq\theta$,设$y=x/\|x\|$,有

$$\|T_nx-Tx\|=\|T_ny-Ty\|\ \|x\|<\varepsilon\|x\|,$$

从而,对于所有$n>N$,$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon$.

例27 设从赋范线性空间X到Y的线性算子定义为$Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)z_i$, $x\in X$,其中$f_i\in X^*$,$z_i\in Y$,$i=1,2,\cdots,n$,证明:

$$T^*g=\sum_{i=1}^{n}g(z_i)f_i.$$

证 因为$Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)z_i$,所以$\forall\ g\in Y^*$,有

$$g(Tx)=g\Big(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)z_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)g(z_i)=\Big(\sum_{i=1}^{n}g(z_i)f_i\Big)(x),$$

但
$$g(Tx)=T^*g(x)=\Big(\sum_{i=1}^{n}g(z_i)f_i\Big)(x),$$

因为x的任意性,所以$T^*g=\sum_{i=1}^{n}g(z_i)f_i$.

例28 设$k(s,t)$是$[a,b]\times[a,b]$上的可测函数,且满足

$$\int_a^b\int_a^b|k(s,t)|^q\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\infty\quad(q\geqslant1)$$

映射
$$(kx)(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\ x\in L^p[a,b].$$

验证k是$L^p[a,b]$到$L^q[a,b]$$(1/p+1/q=1)$内的有界线性算子,证明:

$$(k^*g)(s)=\int_a^b k(t,s)g(t)\mathrm{d}t,\ g\in L^p[a,b].$$

证 先验证k是有界线性算子.

对于$x\in L^p[a,b]$,有

$$\|kx\|_q=\Big(\int_a^b|(kx)(s)|^q\mathrm{d}s\Big)^{1/q}=\Big(\int_a^b\Big|\int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t\Big|^q\mathrm{d}s\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant\Big\{\int_a^b\Big(\int_a^b|k(s,t)|^q\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{q/p}\mathrm{d}s\Big\}^{1/q}$$

$$=\left\{\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}^{1/q}\|x\|_p.$$

所以,k 是线性有界算子,且

$$\|k\|\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)^{1/q}.$$

由于$(L^q[a,b])^*=L^p[a,b]$,故$\forall\ g\in L^*[a,b],x\in L^p[a,b]$,有

$$g(kx)=\int_a^b (kx)(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)g(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\int_a^b k(t,s)x(s)g(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\left(\int_a^b k(t,s)g(t)\mathrm{d}t\right)x(s)\mathrm{d}s.$$

但 $g(kx)=k^*g(x),\quad k^*g\in(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]$,

所以 $$(k^*g)(s)=\int_a^b k(t,s)g(t)\mathrm{d}t.$$

例 29 设 X 是赋范线性空间,证明下列命题等价:

(1)X 可分;

(2)闭单位球$S(X)=\{x|\ \|x\|\leqslant 1\}$可分;

(3)单位球面$S_P(X)=\{x|\ \|x\|=1\}$可分.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 若可数集 A 在 X 中稠密,则 $A\cap S(X)$是$S(X)$中的可数稠密集,从而闭单位球$S(X)=\{x|\ \|x\|\leqslant 1\}$可分.

(2)$\Longrightarrow$(3). 若A 是$S(x)$中的可数稠密集,$\forall\ x\in A,x\neq 0$,令$x'=x/\|x\|$ $(0'=0)$,则$A'=\{x'\in A\}$是S 中的可数稠密集. 因为,事实上$\forall\ x\in S_P(X)$,$\|x\|=1$,若$\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$,必有$\|x_n\|\to\|x\|=1$. 于是

$$\|x_n'-x\|=\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-x\right\|\leqslant\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{x}{\|x_n\|}\right\|+\left\|\frac{x}{\|x_n\|}-x\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\|x_n\|}\cdot\|x_n-x\|+\|x\|\left|\frac{1}{\|x_n\|}-1\right|\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以,$S_P(X)$是可分的.

(3)$\Longrightarrow$(1). 设 $x_1,x_2,\cdots$是 $S_P(X)$中的可数稠密集,记 $B=$

$\{rx_n | r$为有理数$, n=1,2,\cdots\}$，则B 是X 中可数稠密集. 因为，事实上$\forall\ x\in X, x\neq 0, x'=x/\|x\|\in S_P(X)$，若$x_n\in S_P(X)$，$x_n\to x$，取$r_n\to\|x\|$，则$r_nx_n\to x$，$r_nx_n\to B$，从而知$B$ 在X 中稠密，X 是可分的.

例30 证明：在任意的有限维赋范线性空间中，点列的弱收敛与强收敛是等价的.

证 由定义知，强收敛的点列一定弱收敛，故只需证弱收敛的点列一定强收敛即可.

在任意n 维赋范线性空间X 中取一组基$e_1,e_2,\cdots,e_n$，则$\forall\ x\in X$，有$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i$. 由第一章第七节定理10 知，存在正常数C_1,C_2，使得

$$C_1\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{1/2}\leqslant\|x\|\leqslant C_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{1/2}$$

对于一切$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i$ 成立. 若记$f_i\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\Big)=\xi_i$，则$f_i$ 是X 上的线性泛函. 由于

$$|f_i(x)|\leqslant\frac{1}{C_1}\|x\|,$$

故$f_i\in X^*$，$i=1,2,\cdots,n$（有限维赋范线性空间上的线性泛函是连续的）.

若$x_n, x\in X$，$x_n\xrightarrow{弱}x$，则对于$i=1,2,\cdots,n$，均有$f_i(x_n)\to f_i(x)$ $(n\to\infty)$. 因此，

$$\|x_n-x\|\leqslant C_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_n)-f_i(x)|^2\Big)^{1/2}\to 0,$$

即$x_n\xrightarrow{强}x$.

本例实际上说明，对有限维赋范线性空间，点列按范数收敛等价于各相应坐标的收敛.

例31 设M 是赋范线性空间X 的闭线性子空间，证明：若$\{x_n\}\subset M$，且$x_n\xrightarrow{弱}x_0$，则$x_0\in M$.

证 用反证法证．若$x_0\overline{\in}M$，则由题设知，$d=\rho(x_0,M)>0$．于是，依泛函延拓定理，必可取到$f\in X^*$，使得

$$f(x_0)=d,\quad f(x)=0,\ x\in M,$$

从而$f(x_n)=0$．但是$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，故

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0,$$

导出矛盾．因此必有$x_0\in M$．

例32 设E是赋范线性空间X的弱紧集，$\varphi: E\to R$是弱下半连续泛函，证明：φ在E上可达到极小值，即存在$x_0\in E$，使得$\varphi(x_0)=\inf\limits_{x\in E}\varphi(x)$．

证 先证φ在E上有下界．设φ在E上无下界，则$\forall\ n\geqslant1$，$\exists\ x_n\in E$，$\varphi(x_n)<-n$．因为E弱紧，不妨设$x_{n_k}\xrightarrow{\text{弱}}x_0\in E$．由$\varphi$的下半连续性，有

$$\varphi(x_0)\leqslant\varliminf_{n_k\to\infty}\varphi(x_{n_k})=-\infty,$$

导出与φ定义矛盾．故φ在E上必有下界．

其次，若取点列$\{x_n'\}\in E$，使得$\varphi(x_n')\to\inf\limits_{x\in E}\varphi(x)$，则必有子列$x_{n_k}'\to x_0'\in E$．由下半连续性，有

$$\varphi(x_0')\leqslant\varliminf_{n_k\to\infty}\varphi(x_{n_k}')=\inf_{x\in E}\varphi(x).$$

又$\varphi(x_0')\geqslant\inf\limits_{x\in E}\varphi(x)$显然成立，故$\varphi(x_0')=\inf\limits_{x\in E}\varphi(x)$．

现将几个常用共轭空间与线性泛函列出：

$(\Phi^n)^*=\Phi^n$，　　$f(x)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$.

$(l^p)^*=l^q$，　　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$.

$C_0^*=l^1$，　　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$.

$C^*=l^1$，　　$f(x)=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$.

$$(L^p)^* = L^q, \qquad f(x)=\int_a^b x(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

$$(C[a,b])^* = V_0[a,b], \qquad f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t).$$

其中 $1 \leqslant p < \infty, 1/p+1/q=1$.

第五节　逆算子与开映射定理

主 要 内 容

1. **定义1**　设X,Y是两个赋范线性空间,$A\in B(X\to Y)$. 若逆算子A^{-1}存在,$R(A)=Y$,且A^{-1}为有界线性算子,则称A是正则算子.

定 理1　线性有界算子A为正则算子的充要条件是存在定义在Y上的有界算子C,满足

$$CA=I_X, \quad AC=I_Y.$$

定理2　设X,Y是赋范线性空间,$A\in B(X\to Y)$是正则的,则A^*也是正则的,且$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

定理3　设X,Y,Z是赋范线性空间,如果A是X到Y上的正则算子,B是Y到Z上的正则算子,则BA是X到Z上的正则算子,并且有$(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

2. **定义2**　设X,Y是两个距离空间,映射$f:X\to Y$,若f把定义域$D(f)$的每个开集映为值域$R(f)$中的开集,则称f为开映射.

定理4　设T是巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y的有界线性算子,且$TX=Y$,则对于任意$\alpha>0$,必有$\delta>0$,使得$TN(0,\alpha)$在$N(0,\alpha\delta)$中稠密.

定 理5(开映射定理)　设T是巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y的有界线性算子,且$TX=Y$,则T是开映射.

3. **定理6**(逆算子定理)　设T是巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y的有界线性算子,且T是X到Y上的双射,则逆算子T^{-1}一定是

有界算子.

4. 设 X 是线性空间，在 X 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，并满足条件 $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$，$x \in X$，其中 C 为非负常数，则称范数 $\|\cdot\|_2$ **对范数** $\|\cdot\|_1$ **是连续的，或称范数** $\|\cdot\|_2$ **强于范数** $\|\cdot\|_1$**（即** $\|\cdot\|_1$ **弱于** $\|\cdot\|_2$**）**.

定理7 设在线性空间X 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，若X 关于这两个范数都成为完备的赋范线性空间（巴拿赫空间），且范数 $\|\cdot\|_2$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 是连续的（即 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$），则范数 $\|\cdot\|_1$ 关于范数 $\|\cdot\|_2$ 连续（即 $\|\cdot\|_2$ 弱于 $\|\cdot\|_1$）. 从而 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

5. 定义4 设 X，Y 是赋范线性空间，$T: D(T) \to Y$ 是一线性算子，$D(T) \subset X$，若 T 的图像

$$G(T)=\{(x,y) \mid x \in D(T), y=Tx\}$$

在赋范线性空间 $X \times Y$ 中是闭的，则称 T 为一**闭线性算子**.

定理8（闭图像定理） 设 X，Y 是两个巴拿赫空间，T 是$D(T) \subset X$ 到Y 的闭线性算子，若$D(T)$是闭线性子空间，则T 是连续的.

疑 难 解 析

1. 怎样理解逆算子概念？

答 线性算子的逆算子是与算子的“除”法运算联系在一起的，因为各种类型的方程总可以归纳为一般的算子形式 $Ax=y$. 这里，算子 A 是从空间 X 到空间 Y 的一个映射，y 是空间 Y 中的已知元，x 是空间 X 中的未知元. 要确定方程 $Ax=y$ 对每个 $y \in Y$ 何时有惟一解 x 存在，x 连续地依赖于 y，就要讨论 A^{-1}在什么条件下存在且是定义于全空间的连续算子.

当 A 是从空间 X 到空间 Y 的算子，其定义域和值域分别为 $D(A)$和 $R(A)$时，若 A 是单射，即$\forall\ x,y \in D(A)$且 $x \neq y$ 时，$Ax \neq Ay$，则称算子 $A^{-1}: R(A) \to D(A)$，$Ax \to x$ 为 A 的逆算子.

显然，$D(A^{-1})=R(A)$，$R(A^{-1})=D(A)$. 若 A 是线性算子，则

A^{-1}也是线性算子.

2. 闭图像定理的意义是什么?

答 闭图像定理在验证算子是连续算子时是很有用的,它被用来验证某些线性算子的有界性,特别是用泛函分析方法研究偏微分方程时较为重要. 一般地,对于偏微分算子要直接验证它的连续性是比较困难的. 因此,可以用算子成为闭算子的充要条件,先验证某些微分算子是闭算子,然后再利用闭图像定理证明它们是连续算子.

当讨论距离空间上的连续映射时,如果它的定义域是闭的,则映射必是闭映射. 从而,由闭图像定理可知,一个从巴拿赫空间到巴拿赫空间的线性算子,如果它的定义域是闭的,则它是连续算子的充要条件是它为闭算子.

在闭图像定理中,$D(T)$是闭的条件不可缺.

方法、技巧与典型例题分析

要求辨析与理解概念,了解其简单应用.

例1 设X,Y是数域K上的两个向量空间. $T:X\to Y$是线性算子,其值域$R(T)$(即$\mathscr{R}(T)$)包含在Y中,定义域$D(T)$(即$\mathscr{D}(T)$)$\subset X$,证明:

(1)$T^{-1}:R(T)\to D(T)$存在$\Leftrightarrow Tx=\theta\Rightarrow x=\theta$;

(2)若T^{-1}存在,则T^{-1}是线性的;

(3)若$\dim D(T)=n<\infty$,T^{-1}存在,则$\dim R(T)=\dim D(T)$.

证 (1)充分性 设$Tx=\theta\Rightarrow x=\theta$,又设$Tx_1=Tx_2$,则由$T$是线性的,有

$$T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2=\theta,$$

从而$x_1-x_2=\theta\Rightarrow x_1=x_2$,即$Tx_1=Tx_2\Rightarrow x_1=x_2$,故$T$是一对一的,即$T^{-1}$存在.

必要性 若T^{-1}存在,则$Tx_1=Tx_2\Rightarrow x_1=x_2$. 令$x_2=\theta$,则$Tx_1=\theta\Rightarrow x_1=\theta$.

(2)设T^{-1}存在，$\forall\ y_1,y_2\in R(T)$，必$\exists\ x_1,x_2\in D(T)$，使得$y_1=Tx_1,y_2=Tx_2$. 于是$x_1=T^{-1}y_1,x_2=T^{-1}y_2$. 对任意数$\alpha,\beta$，由$T$的线性知

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2),$$

因此 $$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2.$$

而T^{-1}的定义域$D(T^{-1})=R(T)$是向量空间，所以T^{-1}是线性算子.

(3)由本章第一节例3中题(2)知

$$\dim R(T)\leqslant\dim D(T),$$

对于T^{-1}，有

$$\dim R(T^{-1})\leqslant\dim D(T^{-1}),$$

而 $$\dim R(T^{-1})=\dim D(T),\quad \dim D(T^{-1})=\dim R(T),$$

故有 $$\dim D(T)\leqslant\dim R(T).$$

综合以上两式，得$\dim R(T)=\dim D(T)$.

例2 设X,Y,Z是向量空间，$T:X\to Y$和$S:Y\to Z$是两个双射线性算子，证明：乘积ST的逆$(ST)^{-1}$存在，且$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$.

证 由于T,S都是双射线性算子，故T^{-1},S^{-1}均存在，且ST也为双射，所以$(ST)^{-1}$存在，且

$$ST(ST)^{-1}=I_Z,$$

I_Z是空间Z上的恒等算子，从而

$$S^{-1}ST(ST)^{-1}=S^{-1}I_Z=S^{-1}.$$

又由 $$S^{-1}S=I_Y\Rightarrow T(ST)^{-1}=S^{-1},$$

两边乘以T^{-1}，则由$T^{-1}T=I_X$，得

$$T^{-1}T(ST)^{-1}=(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}.$$

例3 设X是由所有2×2阶的复矩阵组成的向量空间，$\boldsymbol{b}\in X$是一固定矩阵，用乘积$Tx=\boldsymbol{b}x$定义$T:X\to X$，证明：T是线性的，且问T^{-1}在什么条件下存在.

证 由矩阵运算性质知，T的线性是显然的. 而T^{-1}存在$\Longleftrightarrow$

$N(T)=\{\theta\}$，即 b 为满秩时，T^{-1}存在.

例 4 设 X,Y 为赋范线性空间，$T: X\to Y$ 为闭线性算子，$T^{-1}: Y\to X$存在，证明：T^{-1}为闭线性算子.

证 取$\{y_n\}\subset Y$，$y\in Y$，$x\in X$，使得当 $n\to\infty$时，$y_n\to y$，$T^{-1}y_n\to x$.

由于$T^{-1}y_n\in X$，$T(T^{-1}y_n)=y_n\to y$，而T 为闭线性算子，所以$Tx=y$. 从而$T^{-1}y=x$，因此T^{-1}是闭线性算子.

例5 设X,Y 是赋范线性空间，$T: X\to Y$ 为闭线性算子，证明：

(1)X 中紧集Ω 的像$T\Omega$ 为Y 中的闭集；

(2)Y 中紧集Ω_1 的原像$T^{-1}\Omega_1$ 为X 中的闭集.

证 (1)取$\{x_n\}\subset\Omega$，$Tx_n\to y\in Y$. 由于Ω 是紧集，故必存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$x_{n_k}\to x$，$x\in\Omega$. 又$Tx_{n_k}\to y$，而T 是闭线性算子，所以$Tx=y$，即 $y\in T\Omega$. 于是$T\Omega$ 为Y 中的闭集.

(2)取$\{y_n\}\subset\Omega_1$，$T^{-1}y_n\to x\in X$. 因为Ω_1 为紧集，所以必有收敛子列$\{y_{n_k}\}$. 设$y_{n_k}\to y$，$y\in\Omega_1$. 又$T^{-1}y_{n_k}\to x$，$T(T^{-1}y_{n_k})=y_{n_k}\to y$，而$T$ 是闭线性算子，所以$Tx=y$，即$x=T^{-1}y\in T^{-1}\Omega_1$. 于是，$T^{-1}\Omega_1$为$X$ 中的闭集.

例6 设$T: X\to Y$ 是线性算子，并且$\dim X=\dim Y=n<\infty$，证明：$R(T)=Y$ 的充要条件是T^{-1}存在.

证 必要性 设$R(T)=Y$，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是Y 的一个基，则存在$e_j\in X$，使得$b_j=Te_j$.

令$\sum_{j=1}^{n}\alpha_je_i=\theta$，因为$T$ 是线性的，有

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_jTe_j=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jb_j=\theta.$$

由于$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 线性无关，得$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，故$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是$X$ 的一个基. 若$Tx=\theta$，则$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j$，有$Tx=\sum_{j=1}^{n}\xi_jTe_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_jb_j$

$=\theta$，从而 $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$，即 $x=\theta$. 由例 1 知，T^{-1} 存在.

充分性由例 1 中题(3)直接可得.

例 7 设 T 是从赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子，如果存在正数 b，使得 $\forall\ x\in X$，有 $\|Tx\|\geqslant b\|x\|$，证明：T^{-1} 存在并有界.

证 由

$$Tx=\theta \Rightarrow b\|x\|\leqslant\|Tx\|=0 \Rightarrow \|x\|=0 \Rightarrow x=\theta,$$

则依例 1 中题(1)知，T^{-1} 存在.

因为 $R(T)=Y$，$\forall\ y\in Y$，存在 $x\in X$，使得 $y=Tx$，即 $T^{-1}y=x$，从而

$$\|T^{-1}y\|=\|x\|\leqslant\frac{1}{b}\|Tx\|=\frac{1}{b}\|y\|.$$

综上知，T^{-1} 存在且有界.

例 8 证明：有界线性算子 $T:X\to Y$ 的逆 $T^{-1}:R(T)\to X$ 不一定有界.

证 取

$$y_n=(\eta_j^{(n)}),\quad \eta_j^{(n)}=\frac{n}{(n+j)\sqrt{j}}.$$

$$T^{-1}y_n=x_n=(\xi_j^{(n)})=(j\eta_j^{(n)})=\left(\frac{n\sqrt{j}}{n+j}\right),$$

则 $\|y_n\|\leqslant 1,\quad \|x_n\|=\sqrt{n}/2,\quad \dfrac{\|T^{-1}y_n\|}{\|y_n\|}\geqslant\dfrac{\sqrt{n}}{2}\to\infty,$

从而 T^{-1} 不一定有界.

例 9 证明：由 $(\xi_1,\xi_2)\mapsto\xi_2$ 定义的 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是开映射. 由 $(\xi_1,\xi_2)\mapsto(\xi_1,0)$ 定义的映射 $S:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是开映射吗？

证 因为 $Tx=\xi_1$，$x=(\xi_1,\xi_2)$，T 将 $\mathbf{R}^2$ 中的开球映成 $\mathbf{R}$ 中的开区间，开区间是 $\mathbf{R}$ 中的开集，所以 T 是开映射.

$S:(\xi_1,\xi_2)\to(\xi_1,0)$ 将开球映为开区间，但开区间在 $\mathbf{R}^2$ 上不是开集，所以 S 不是开映射.

例 10 举例说明一个开映射不一定将闭集映射到闭集上.

解 例如，例 9 中的映射 T 将闭集 $\{(\xi_1,\xi_2)\mid\xi_1\xi_2=1\}\subset\mathbf{R}^2$ 映

为$\mathbf{R}\backslash\{0\}$，而$\mathbf{R}\backslash\{0\}$在$\mathbf{R}$中不是闭的.

例11 设X是赋范线性空间，$x=\{\xi_i\}$是只有有限个非零项的复数列，其范数定义为$\|x\|=\sup_j|\xi_j|$，又设T是由$y=Tx=\left(\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\frac{1}{3}\xi_3,\cdots\right)$定义的，证明：$T$是有界线性算子，但$T^{-1}$是无界的.

证 因为

$$
\begin{aligned}
T(\alpha x+\beta y)&=\left((\alpha\xi_1+\beta\eta_1),\frac{1}{2}(\alpha\xi_2+\beta\eta_2),\cdots\right)\\
&=\alpha\left(\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\frac{1}{3}\xi_3,\cdots\right)+\beta\left(\eta_1,\frac{1}{2}\eta_2,\frac{1}{3}\eta_3,\cdots\right)\\
&=\alpha Tx+\beta Ty,
\end{aligned}
$$

$$
\|Tx\|=\sup_j\left|\frac{1}{j}\xi_j\right|\leqslant\sup_j|\xi_j|=\|x\|,
$$

即$\|T\|<1$，所以T是有界线性算子.

又$T^{-1}y=(\eta_1,2\eta_2,\cdots)$，取$y_n=(K^{-1}\delta_{kj})$，则$x_k=T^{-1}y_k=(\delta_{kj})$. $1=\|x_k\|=\|T^{-1}y_n\|=K\|y_k\|$，即$\|T^{-1}\|\geqslant K$. $K=1,2,\cdots$，从而T^{-1}无界.

T^{-1}无界与开映射定理并不矛盾，因为这里X不是完备的.

例12 设X和Y是巴拿赫空间，$T:X\to Y$是单射有界线性算子，证明：$T^{-1}:R(T)\to X$是有界的，当且仅当$R(T)$在Y中是闭的.

证 充分性 若$R(T)$在Y中是闭的，则$R(T)$是完备的. 由开映射定理，T^{-1}是有界的.

必要性 设T^{-1}是有界的，$\forall\ y\in\overline{R(T)}\subset Y$，存在$\{y_n\}\subset R(T)$，使得$y_n\to y$，且有$x_n=T^{-1}y_n$. 因为$T^{-1}$是连续的，$X$又是完备的，则依连续映射定理知，$\{x_n\}$收敛，即$x_n\to x\in X$. 因为$T$是连续的，$y_n=Tx_n\to Tx$，所以$y=Tx\in R(T)$. 由于$y\in\overline{R(T)}$是任意的，故$R(T)$是闭的.

例13 设$T:X\to Y$是有界线性算子，X,Y是巴拿赫空间. 若

T 是双射，证明：存在正实数 a,b，使得 $\forall\ x\in X$，有

$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|.$$

证 由题设知，X,Y 是巴拿赫空间，$T: X\to Y$ 是双射有界线性算子，则依开映射定理，T^{-1}是有界的. 因为

$$1=\|TT^{-1}\|\leqslant\|T\|\ \|T^{-1}\|,$$

故
$$\|T^{-1}\|>0,\quad \|T\|>0.$$

令
$$a=1/\|T^{-1}\|,\quad b=\|T\|,$$

则可得
$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|.$$

设 X 是线性空间，L 与 M 是 X 的两个线性子空间. 若 $L\cap M=\{\theta\}$，则称集合 $\{x_l+x_m\mid x_l\in L,x_m\in M\}$ 为 L 与 M 的**直接和**，记做 $L\dot{+}M$. $\forall\ x\in L\dot{+}M$，有惟一的分解 $x=x_l+x_m$，其中 $x_l\in L,x_m\in M$. 当 $X=L\dot{+}M$，a 为数时，有

$$(ax)_l=ax_l,\quad (x+y)_l=x_l+y_l,\quad x,y\in X.$$

例 14 设 X 是巴拿赫空间，L 与 M 是 X 的两个闭线性子空间，且 $X=L\dot{+}M$. 证明：X 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 的充要条件是

$$x_l^{(n)}\to x_l,\quad x_m^{(n)}\to x_m\quad (n\to\infty),$$

其中 $x_l^{(n)}$，x_l 分别是 x_n，x 在 L 中的分量，$x_m^{(n)}$，x_m 分别是 x_n，x 在 M 中的分量.

证 充分性 若 $x_l^{(n)}\to x_l,x_m^{(n)}\to x_m$，则

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=\|x_l^{(n)}+x_m^{(n)}-(x_l+x_m)\|\\&\leqslant\|x_l^{(n)}-x_l\|+\|x_m^{(n)}-x_m\|\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

必要性 在 $X=X_l+X_m$ 上引入新的范数

$$\|x\|_1=\|x_l\|+\|x_m\|.$$

因为 L,M 是 X 的闭线性子空间，所以 L,M 也可视为巴拿赫空间. 取 $\{x_p\}$ 是 X 中按 $\|\cdot\|_1$ 的基本列，由于

$$\|x_p-x_q\|_1=\|x_l^{(p)}-x_l^{(q)}\|+\|x_m^{(p)}-x_m^{(q)}\|,$$

所以 $\{x_l^{(p)}\}$，$\{x_m^{(p)}\}$ 分别是 L,M 中的基本列，从而存在 $x_l\in L,x_m\in M$，使得

$$\| x_l^{(p)}-x_l \| \to 0, \quad \| x_m^{(p)}-x_m \| \to 0.$$

若记$x=x_l+x_m$，则有$\| x_p-x \|_1 \to 0 \quad (n\to\infty)$.

视X上恒等算子I为$(X, \| \cdot \|_1)$到$(x, \| \cdot \|)$的算子，明显地，I是线性双射，而由

$$\| Ix \| = \| x \| = \| x_l+x_m \| \leqslant \| x_l \| + \| x_m \| = \| x \|_1$$

知，I是$(X, \| \cdot \|_1)$到$(X, \| \cdot \|)$的连续算子. 由逆算子定理，I^{-1}是$(X, \| \cdot \|)$到$(X, \| \cdot \|_1)$的连续算子，因此，当$\{x_n\}$按$\| \cdot \|$收敛于x时，必有$\{x_n\}$按$\| \cdot \|_1$收敛于x，即X按$\| \cdot \|_1$也是巴拿赫空间，从而

$$x_l^{(n)} \to x_l, x_m^{(n)} \to x_m \quad (n\to\infty).$$

例 15 设$X=L[1,\infty)$为$[1,\infty)$上勒贝格可积函数全体，对$x \in X$，按范数$\| x \| = \int_1^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t$，$X$为巴拿赫空间，证明：$X$上算子$T: x(t) \to tx(t)$是闭算子，但$D(T)$不是闭线性子空间.

证 设$x_0 \in D(T)$，$x_n \to x_0$，$Tx_n \to y_0$，显然，对$x_0, y_0 \in X$，且对$[1,\infty)$上几乎所有的t，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x_0(t), \quad \lim_{n\to\infty} tx_n(t)=y_0(t),$$

从而，对几乎所有的t，有$y_0(t)=tx_0(t)$. 所以$x_0 \in D(T)$，且$Tx_0=y_0$，即T是闭算子.

又T是无界算子，当取$x_n(t)=\chi_{[n,n+1]}$（即x_n为$[n,n+1]$上特征函数时），即有$\| x_n \| =1$. 从而

$$\| Tx_n \| = \int_1^{\infty} tx_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^{n+1} t\mathrm{d}t \geqslant n,$$

所以T不是有界的，T不连续.

因为$D(T)$是X中的稠密子空间，但$D(T) \neq X$，所以$D(T)$不是闭线性子空间.

例 16 设闭线性算子T的逆T^{-1}存在，证明：T^{-1}是闭线性算子.

证 因为T是线性的，由例 1 知，T^{-1}是线性的. 又因为

$G(T)\subset X\times Y$是闭的，由$(x,y)\mapsto(y,x)$定义的映射$X\times Y\to Y\times X$是等距的，于是$G(T^{-1})=\{(Tx,x)|x\in D(T)\}\subset Y\times X$是闭的. 所以$T^{-1}$是闭线性算子.

例 17 设X,Y是赋范线性空间，且Y是紧的，若$T:X\to Y$是闭线性算子，证明：T是有界的.

证 因为任意闭子集$K\subset Y$是紧的，由例5知，K的原像在X中是闭的，所以T是连续的，从而T是有界的.

例 18 设X,X_1,X_2均为巴拿赫空间，T_1,T_2分别为从X到X_1与X_2的闭线性算子，且$D(T_1)\subset D(T_2)$，证明：必存在一个正常数C，使得

$$\|T_2x\|\leqslant C(\|T_1x\|+\|x\|).$$

证 在积空间$X\times X_1$中定义范数

$$\|(x,x_1)\|=\|x\|+\|x_1\|,$$

因为T_1是闭线性算子，所以图像$G(T_1)$是$X\times X_1$中的一个闭集. 而X,X_1是完备的，于是$X\times X_1$也是完备的，故$G(T_1)$也是巴拿赫空间.

作算子$B:G(T_1)\to X_2,(x,T_1x)\to T_2x,(x,T_1x)\in G(T_1)$，可以验证$B$是一个线性算子. 又，若有序列$\{(x_n,T_1x_n)\}\subset G(T_1)$，使得

$$(x_n,T_1x_n)\to(x,T_1x),\quad T_2x_n\to y\quad(n\to\infty),$$

则由假设知，$\{x_n\}\subset D(T_1)\subset D(T_2)$. 由$X\times X_1$中范数定义知，$x_n\to x,T_2x_n\to y\quad(n\to\infty)$，而$T_2$是闭算子，故$x\in D(T),T_2x=y$. 于是$B(x,T_1x)=T_2x=y$，即$B$是闭线性算子.

因为$D(B)=G(T_1),X_2$均为巴拿赫空间，则依闭图像定理，B为从$G(T_1)$到X_2的有界线性算子，从而必存在常数C，使得对于一切$x\in D(T_1)$，有

$$\begin{aligned}\|T_2x\|&=\|B(x,T_1x)\|\leqslant C\|(x,T_1x)\|\\&=C(\|T_1x\|+\|x\|).\end{aligned}$$

例 19 设(a_{ij})中无穷矩阵满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty, i=1,2,\cdots,$$

$T: l^2\to l^2$定义为$x\to Tx$,其中

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2,\quad Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots),$$

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j(i=1,2,\cdots),$$

证明:T 为有界线性算子.

证 设 $\{x_n\}\subset l^2, x,y\in l^2, x_n\to x, Tx_n\to y(n\to\infty)$,

$$x_n=(\xi_1^n,\xi_2^n,\cdots,\quad\xi_n^n,\cdots),\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),$$

$$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots),$$

则对任何固定的i,有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j-\eta\right|\\
&\leqslant\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}(\xi_j^n-\xi_j)\right|+\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j^n-\eta\right|\\
&\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^n-\xi_j|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j^n-\eta_j\right|^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0\quad(n\to\infty),
\end{aligned}$$

故,$\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\quad(i=1,2,\cdots)$,即$Tx=y$. 这说明$T$ 是定义于整个l^2上的闭算子,依闭图像定理,T 是连续的.

例 20 设无穷矩阵(a_{ij})满足:对于每个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$, $\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j(i=1,2,\cdots)$都收敛,且 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^\infty$,令 $y=Tx$,证明:T 是$l^\infty\to l^\infty$的有界线性算子.

证 因为$\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j(i=1,2,\cdots)$收敛,所以,若取 $x=(\mathrm{sign}a_{i1},\mathrm{sign}a_{i2},\cdots,\mathrm{sign}a_{in},\cdots)\in l^\infty$,则有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\mathrm{sign}a_{ij}<\infty,\ i=1,2,\cdots.$$

令 $f_1(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j, x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty$，显然有 f_1 是 l^∞ 上的线性泛函，且

$$|f_1(x)|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\cdot\sup_j|\xi_j|=\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\,\|x\|\,,x\in l^\infty,$$

即 $f_1\in(l^\infty)^*$.

另一方面，T 显然是线性的. 对于

$$x_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)},\cdots)\in l^\infty,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty,$$

$$x_k\to x,Tx_k\to y,y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots).$$

如果记

$$Tx_k=(\eta_1^{(k)},\eta_2^{(k)},\cdots,\eta_n^{(k)},\cdots),\ Tx=(\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},\cdots,\eta_n^{(0)},\cdots),$$

有 $$x_k\to x,\quad f_1\in(l^\infty)^*,$$

则 $$f_1(x_k)=\eta_1^{(k)}\to f_1(x)=\eta_1^{(0)}\quad(i=1,2,\cdots).$$

又因为 $Tx_k\to y$，所以

$$\eta_i^{(k)}\to\eta_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

于是 $$\eta_i=\eta_i^{(0)}(i=1,2,\cdots),$$

即 $y=Tx$. 因为 T 是闭算子，则依闭图像定理，T 是有界算子. 从而，T 是 $l^\infty\to l^\infty$ 的有界线性算子.

例 21 设 X 是赋范线性空间，A 是从 X 到 X 的线性算子，$D(A)=X$，B 是从 X^* 到 X^* 的线性算子，$D(B)=X^*$. 若 $\forall\ x\in X$ 及 $f\in X^*$，均有 $(Bf)(x)=f(Ax)$，证明：A 与 B 都是有界线性算子.

证 先证 B 是有界线性算子. 设 $f_n,f\in X^*$，使得 $\|f_n-f\|\to 0$，$\|Bf_n-g\|\to 0$，则 $\forall\ x\in X$，有

$$(Bf_n)(x)=f_n(Ax)\to f(Ax)=(Bf)(x),$$

$$(Bf_n)(x)\to g(x),$$

所以，$Bf=g$，于是 B 是闭算子. 依闭图像定理，B 是有界线性算子.

再证 A 是有界线性算子. 因为 $\forall\ x\in X$，由哈恩-巴拿赫定理，

可取 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，使得 $f(Ax)=\|Ax\|$. 于是

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=f(Ax)=(Bf)(x)\leqslant\|Bf\|\ \|x\|\\&\leqslant\|B\|\ \|f\|\ \|x\|=\|B\|\ \|x\|,\end{aligned}$$

所以，A 是有界线性算子.

例 22 设 X 为巴拿赫空间，线性算子 $P: X\to X$ 是幂等的，即 $P^2=P$，且零空间 $N(P)$ 与值域 $R(P)$ 均是闭的，证明：P 一定是有界线性算子.

证 如果 P 是闭算子，则由闭图像定理，即可得 P 是有界线性算子.

设有点列 $\{x_n\}\in X$，$x,y\in X$，在 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$，$Px_n\to y$. 因为 $R(P)$ 是闭的，故必有 $x_0\in X$，使 $y=Px_0$.

因为
$$P(Px_n-x_n)=P^2x_n-Px_n=0,$$
所以
$$Px_n-x_n\in N(P).$$
而 $N(P)$ 是闭的，于是
$$y-x=\lim_{n\to\infty}(Px_n-x_n)\in N(P),$$
即 $P(y-x)=0$，从而
$$y=Px_0=P^2x_0=Px,$$
故 P 是有界线性算子.

由例19至例22可以看到，当需要证明某算子 A 是有界线性算子时，利用闭图像定理，可以使证明变得简单，只需证明 A 是闭算子即可.

例23 设 $C[0,1]$ 按范数 $\|\cdot\|_1$ 为巴拿赫空间，且 $\|x_n-x\|_1\to0$ 时，$\forall\ t\in[0,1]$，$|x_n(t)-x(t)|\to0$，证明：$\|\cdot\|_1$ 必与范数 $\|x\|=\max|x(t)|$ 等价.

证 若 $\|x\|_1\leqslant\|I\|\ \|x\|$，$\|x\|\leqslant\|I^{-1}\|\ \|x\|_1$，$x\in C[0,1]$，则 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价.

设有恒等算子 $I:(C[0,1],\|x\|)\to(C[0,1],\|x\|_1)$，则 I 显然是线性双射. 设 $\{x_n\}\subset C[0,1]$，$x,y\in C[0,1]$，使得
$$\|x_n-x\|\to0,\quad \|Ix_n-y\|_1\to0,$$

则由条件得

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-y(t)|$$
$$\leqslant\|x_n-x\|+|x_n(t)-y(t)|\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中$t\in[0,1]$，故$x=y$，即$Ix=y$，说明I是有界闭算子. 由逆算子定理知，I^{-1}也是有界算子.

$$\|x\|_1\leqslant\|I\|\ \|x\|,\quad \|x\|\leqslant\|I^{-1}\|\ \|x\|_1,\quad x\in C[0,1],$$

于是$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$等价.

例 24 设$X=C[0,1]$，且$T:D(T)\to X$，$x\mapsto x'$（x'是x的导数），其中$D(T)$是由具有连续导数的函数$x\in X$构成的子空间，证明：T是无界的，但它是闭的.

证 设$x_n(t)=t^n$，则$\|x_n\|=1$，且$Tx_n=nt^{n-1}$. 则$\|Tx_n\|=n$，$\|Tx_n\|/\|x_n\|=n$. 说明不存在固定的正数c，使得$\|Tx_n\|/\|x\|\leqslant c$，从而$T$无界.

设$\{x_n\}\subset D(T)$，且$x_n\to x$，$Tx_n\to y$，因为按$C[0,1]$上的范数收敛是$[0,1]$上的一致收敛，由$x_n'=Tx_n\to y$，有

$$\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \lim_{n\to\infty}x_n'(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)-x(0),$$

即

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(t)\mathrm{d}t,$$

亦即$x\in D(T)$，且$x'=y$. 故T是闭的.

例 25 设X,Y是赋范线性空间，$T:D(T)\to Y$是线性算子，$D(T)\subset X$，证明：T是闭的$\Longleftrightarrow$若$x_n\to x$，则$x\in D(T)$，且$Tx=y$，其中$x_n\in D(T)$，$Tx_n\to y$.

证 依定义4，T为闭的充要条件是$G(T)$是闭的，而G为闭的充要条件是$z=(x,y)\in\overline{G(T)}\Rightarrow z\in G(T)$. 又$z\in\overline{G(T)}$的充要条件是存在$z_n=(x_n,Tx_n)\in G(T)$，使得$z_n\to z$. 因此，$x_n\to x$，$Tx_n\to y$. $z=(x,y)\in G(T)$的充要条件是$x\in D(T)$，且$Tx=y$.

注意，例25所给性质与有界线性算子性质有区别. 若T是有

界的，则T是连续的；若$\{x_n\}$是$D(T)$中收敛序列，则$\{Tx_n\}$也收敛，这对于闭线性算子不一定成立．对于T是闭的情形，若两个序列$\{x_n\}$和$\{\widetilde{x}_n\}$在$D(T)$中收敛于同一极限，且相应的序列$\{Tx_n\}$与$\{T\widetilde{x}_n\}$均收敛，则$\{Tx_n\}$与$\{T\widetilde{x}_n\}$也有相同的极限．

例26 设X,Y是赋范线性空间，$T:D(T)\to Y$是有界线性算子，$D(T)\subset X$，证明：

(1)若$D(T)$是X的闭子集，则T是闭的；

(2)若T是闭的，且Y是完备的，则$D(T)$是X的闭子集．

证 (1)设$\{x_n\}$在$D(T)$中收敛，$x_n\to x$，且$\{Tx_n\}$也收敛，则由于$D(T)$是闭的，故$x\in\overline{D(T)}=D(T)$．又因为T是连续的，所以$Tx_n\to Tx$，由例25结论知，T是闭的．

(2)$\forall\ x\in\overline{D(T)}$，故必存在$D(T)$中一序列$\{x_n\}$，使得$x_n\to x$．由于$T$是有界线性算子，故

$$\|Tx_n-Tx_m\|=\|T(x_n-x_m)\|\leqslant\|T\|\ \|x_n-x_m\|,$$

即$\{Tx_n\}$是柯西序列．因为Y是完备的，所以$\{Tx_n\}$收敛，即$Tx_n\to y\in Y$．

又由T是闭的，由例25结论知，$x\in D(T)$，且$Tx=y$．因为x的任意性，所以$D(T)$是闭的．

例27 设X,Y是赋范线性空间，且X是紧的，若$T:X\to Y$是双射闭线性算子，证明：T^{-1}是有界的．

证 因为$T:X\to Y$是双射线性算子，所以T^{-1}存在．又因为T是闭线性算子，则由例16知，T^{-1}也是闭线性算子．由题设知X是紧的，故由例17知，T^{-1}是有界的．

例28 设X,Y是赋范线性空间，若$T_1:X\to Y$是闭线性算子，$T_2\in B(X,Y)$，证明：T_1+T_2是闭线性算子．

证 因为$T_2\in B(X,Y)$，X在其自身中是闭的，则由例26结论知，T_2是闭线性算子．因此，$\forall\ x_n\to x,x_n,x\in X$，若$T_1x_n\to y_1,T_2x_n\to y_2$，则由例25结论知，$T_1x=y_1,T_2x=y_2$．于是，当$(T_1+T_2)x_n\to y_1+y_2$时，有

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x=y_1+y_2.$$

再次利用例25结论，即得T_1+T_2是闭线性算子．

例29(闭延拓)　设$T:D(T)\to Y$是闭线性算子，具有图像$G(T)$，其中$D(T)\subset X$，且X,Y均为巴拿赫空间，证明：T有闭线性延拓算子$\tilde{T}$，则其图像为$\overline{G(T)}$的充要条件是$\overline{G(T)}$不含形如(θ,y)的元素，且$y\neq\theta$．

证　必要性　若T有闭线性延拓算子$\tilde{T}$，则其图像为$\overline{G(T)}$．因为$\tilde{T}$将θ映成θ，所以$\overline{G(T)}$不含形如(θ,y)，且$y\neq\theta$的元素．

充分性　设$\overline{G(T)}$不含形如(θ,y)，且$y\neq\theta$的元素，若(x,y_1)，$(x,y_2)\in\overline{G(T)}$，则

$$(x,y_1)-(x,y_2)=(\theta,y_1-y_2)\in\overline{G(T)}.$$

由假设知，$y_1-y_2=\theta$，所以，$\forall\ (x,y)\in\overline{G(T)}$存在映射$\tilde{T}$为$x\mapsto y$，即$\tilde{T}x=y$，显然$\tilde{T}$是$T$的延拓．因为$G(T)$是向量空间，所以$\overline{G(T)}$也是向量空间，于是$\tilde{T}$是线性的．由于$\overline{G(T)}$是闭的，因而$\tilde{T}$是闭线性算子．

例30(零空间)　证明：闭线性算子$T:X\to Y$的零空间$N(T)$是X的闭子空间．

证　因为，$\forall\ x\in\overline{N(T)}$，$\exists\ \{x_n\}\in N(T)$，使得$x_n\to x$，于是$Tx_n=\theta\to\theta$．又因为$T$是闭线性算子，由例25结论知，$Tx=\theta$，所以$x\in N(T)$．即$N(T)$是$X$的闭子空间．

第六节　共鸣定理

主要内容

1．定理1(共鸣定理或一致有界性原理或巴拿赫-斯坦因豪斯定理)　设X是巴拿赫空间，Y是赋范线性空间，$(T_\tau,\tau\in A)$是一族从X到Y的有界线性算子．如果对每个$x\in X$，$\sup\limits_{\tau\in A}\|T_\tau x\|<\infty$，

则数集$\{\|T_\tau\|, \tau\in A\}$是有界的.

推论 1 设$\{f_\tau\}$是巴拿赫空间X上的一族泛函，若$\forall\ x\in X$，$\{f_\tau(x)\}$是有界集，则$\{f_\tau\}$一致有界，即$\sup\limits_\tau\|f_\tau\|<\infty$.

推论 2 设$\{x_\tau\}$是赋范线性空间X中的一族元，对于X^*中的任何元f，$\sup\limits_\tau|f(x_\tau)|<\infty$，则必有$\sup\limits_\tau\|x_\tau\|<\infty$.

2. **定理 2** 设X,Y是巴拿赫空间，$\{T_n\}$是一列X到Y的线性有界算子. 设$\forall\ x\in X$，$\{T_nx\}$收敛，则必存在X到Y的线性有界算子T，使得$\{T_n\}$强收敛于T，且$\|T\|<\underline{\lim}_{n\to\infty}\|T_n\|$.

3. **定义 1** 设Φ是X的共轭空间X^*的子集，当按泛函的范数有界时(即存在常数M，使得对于一切$f\in\Phi$，$\|f\|\leqslant M$)，称Φ是强有界的. 若$\forall\ x\in X$，数集$\{f(x)\,|\,f\in\Phi\}$有界，称Φ是弱*有界的.

4. **定理 3**(斯切克洛夫(Стеклов)定理) 机械求积公式

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{kn}A_k^{(n)}xt_k^{(n)}\ (a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{kn}^{(n)}=b)$$

对于任一函数$x\in C[a,b]$收敛于$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$的充要条件是：

(1)存在常数M，使得$\sum\limits_{k=0}^{kn}|A_k^{(n)}|\leqslant M$；

(2)对任一多项式$x=x(t)$，有

$$f_n(x)\to\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\quad(n\to\infty).$$

推论 设$A_k^{(n)}\geqslant0$，则$\forall\ x\in C[a,b]$，$f_n(x)\to\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$的充要条件是对于每个多项式$x(t)$，有

$$f_n(x)\to\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\quad(n\to\infty).$$

5. 设有(形式)数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$，通常用$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$作为和$S$，即$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，称$S$为级数的**柯西和**. 对任意的无穷矩阵

$$(\alpha_{nk})=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad ①$$

作和$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}S_k \quad (n=1,2,\cdots)$. 若对于固定的$n$,级数的柯西和存在,且当$n\to\infty$时$\sigma_n\to\sigma$,则称$\sigma$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$关于无穷矩阵的广义和. 若矩阵$(\alpha_{nk})$使得相应的求和法关于柯西求和法具有承袭性(即在原求和法下其和存在的级数在新求和法下和仍存在,且两者相等的性质),则称(α_{nk})为**正则矩阵**.

定理4 设C是收敛数列$x=\{x_n\}$全体按范数$\|x\|=\sup\limits_{n\geq 1}|x_n|$所构成的巴拿赫空间,又设$\{\alpha_k\}$是一列数,若$\forall\ x=\{x_n\}\in C$,数值$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$存在,则$f$是$C$上的线性连续泛函,且

$$\|f\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty.$$

定理5(托普里兹(Toeplitz)定理) (α_{nk})是正则矩阵的充要条件是:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0,\ k=1,2,\cdots$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}=1$;

(3)$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leq M,\ n=1,2,\cdots$.

疑难解析

1. 共鸣定理有何意义? 常用什么方法证明?

答 在分析数学领域会常常遇到一族有界线性算子是否一致有界的问题,共鸣定理就是讨论在什么条件下,一族线性有界线性算子一定一致有界,所以也称为一致有界性原理. 利用共鸣定理可

以讨论傅里叶级数的发散问题、机械求积的收敛性问题等.

证明共鸣定理的方法很多，常用逆算子定理证明，也用更直接的方法——"纲推理"方法证明. 这些证明涉及内容与定理较多，读者一定要认真体会与理解.

2. 强有界与弱*有界有何不同？

答 对X的共轭空间X^*的子集Φ当按泛函的范数有界时，称Φ是强有界的；若$\forall\ x\in X$，数集$\{f(x)\mid f\in\Phi\}$有界，则称Φ是弱*有界的.

强有界集显然是弱*有界的. 又因为致密的数集是有界的，所以弱*致密集必是弱*-有界集.

利用"强有界"、"弱*有界"的概念，可以把关于线性泛函的共鸣定理改述为：当X是巴拿赫空间时，共轭空间X^*中的弱*-有界集也是强有界的. 因而，弱*-有界集和强有界集这两个概念完全一致，统称为有界集，并由此得出，X^*中的弱*-致密集是强有界的.

方法、技巧与典型例题分析

共鸣定理与开映射定理同属于"纲推理"型的定理，证明的关键在于利用好完备空间的第二纲性. 要认真理解定理，掌握定理的证明方法，学会应用共鸣定理分析问题.

例1 考虑空间C，若$\alpha=\{\alpha_n\}$是某个标量序列，$\forall\ x=\{x_n\}\in C$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\alpha_n$收敛，证明：$\alpha\in l^1$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\alpha_n$是$C$上的连续线性泛函，并且$\|f\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$.

证 在C上定义$f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，则$f_n$是线性泛函，且

$$|f_n(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|\alpha_i|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\Big)\sup_{n\geqslant1}|x_n|,$$

所以$\|f_n\|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|$，$f_n$是有界线性泛函. 因为，若取$x^{(n)}=$

$(\text{sign}\alpha_1, \text{sign}\alpha_2, \cdots, \text{sign}\alpha_n, 0, \cdots)$，则 $x^{(n)} \in C$，$\| x^{(n)} \| = 1$，故

$$\| f_n \| \geqslant |f(x^{(n)})| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \Longrightarrow \| f_n \| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

$\forall\ x \in C, f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n\alpha_n$，由共鸣定理，$\| f_n \|$ 有界，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \sup_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \sup_{n\geqslant 1} \| f_n \| < \infty,$$

即 $\alpha \in l^1$.

由共鸣定理知，存在 $f \in X^*$，且

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\alpha_n,$$

且 $\| f \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$，而实际上又有 $\| f \| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_j|\ \forall\ n$ 成立，所以 $\| f \| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$.

例 2　设 X 为实赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X$，证明：对一切 $f \in X^*$，$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ 的充要条件是：存在正数 M，使得对于一切 n 和 $\varepsilon_i = \pm 1$，$i = 1, 2, \cdots$，有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant M.$$

证　必要性　$\forall\ f \in X^*$，记 $\varepsilon_i = \text{sign} f(x_1)$，则 $\forall\ n \in \mathbf{N}$，有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \Big) \leqslant \| f \| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant M \| f \|,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \leqslant M \| f \|.$$

充分性　$\forall\ f \in X^*$，有

$$\left| \Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \Big)^{**}(f) \right| = \left| f\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \Big) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| < \infty,$$

则由共鸣定理，存在M，对一切n，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|=\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right)^{**}\right\|\leqslant M.$$

例3 设X为巴拿赫空间，T是$X\to X$的线性算子，证明：T为有界算子的充要条件是对于任何$x_n\xrightarrow{弱}x$，有$Tx_n\xrightarrow{弱}Tx$.

证 必要性 设T为有界线性算子，$\{x_n\}$弱收敛于x，则$\forall f\in X^*$. 因为$T^*f\in X^*$，有

$$f(Tx_n)=T^*f(x_n)\to T^*f(x)=f(Tx)\quad(n\to\infty),$$

所以，$\{Tx_n\}$弱收敛于Tx.

充分性 用反证法证. 设$\forall\ x_n\xrightarrow{弱}x$，有$Tx_n\xrightarrow{弱}Tx$，若$T$无界，则存在一列单位向量$\{x_n\}$，使得$\|Tx_n\|\geqslant n^2$. 作$y_n=nx_n/\|Tx_n\|$，则$\|y_n\|\to 0$，必有$y_n\xrightarrow{弱}0$，故$Ty_n\xrightarrow{弱}0\quad(n\to\infty)$. 从而$\sup\limits_n\|Ty_n\|<\infty$，与$\|Ty_n\|=n$矛盾.

也可以用闭图像定理给予证明. 设$Tx_n\to y$，$x_n\to x\quad(n\to\infty)$均在范数意义下成立，而一方面$x_n\xrightarrow{弱}x$由充分性知$Tx_n\xrightarrow{弱}Tx$，另一方面$Tx_n\xrightarrow{弱}y$，由弱收敛点极限的惟一性可知，$y=Tx$，即$T$为闭算子. 于是，由闭图像定理得出$T$是有界线性算子.

例4 设X是巴拿赫空间，$\{f_i\}$是X上一列连续线性泛函，证明：$\forall\ x\in X$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|<\infty$的充要条件是$\forall\ F\in X^{**}$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|F(f_i)|<\infty$.

证 充分性 设$\forall\ F\in X^{**}$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|F(f_i)|<\infty$，则$\forall\ x\in X$. 作$x^{**}(f)=f(x)$，$f\in X^*$，必有$x^{**}\in X^{**}$，于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|=\sum_{i=1}^{\infty}|x^{**}(f_i)|<\infty.$$

必要性 $\forall\ F\in X^{**}$，记$\varepsilon_i=\operatorname{sign}F(f_i)$，则$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(f_i)|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i F(f_i)=F\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\Big).$$

又$\forall\ x\in X$,有

$$\Big|\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\Big)(x)\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|<\infty,$$

则由共鸣定理知,存在$M>0$,使得$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\Big\|\leqslant M, n=1,2,\cdots$,即$\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\Big\|\Big\}$是有界的. 于是得到

$$\sum_{i=1}^{n}|F(f_i)|=\Big|F\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\Big)\Big|\leqslant\|F\|\cdot M,$$

即
$$\sum_{i=1}^{\infty}|F(f_i)|<\infty.$$

例5 设P是巴拿赫空间X上的泛函,适合以下条件:

(1)$P(x)\geqslant 0$;

(2)α为非负数时,$P(\alpha x)=\alpha P(x)$;

(3)$P(x_1+x_2)\leqslant P(x_1)+P(x_2)$;

(4)当$x\in X, x_n\to x$时,$\varliminf_{n\to\infty}P(x_n)\geqslant P(x)$.

证明:存在$M>0$,使得$\forall\ x\in X, P(x)\leqslant M\|x\|$.

证 取集$X_k=\{x\,|\,P(x)\leqslant k\}$,则$X=\sum_{k=1}^{\infty}X_k$. 若$\{x_n\}\subset X_k, x_n\to x\in X$,可由$P(x)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}P(x_n)\leqslant k$,得$x\in X_k$. 从而知$X_k$是闭集.

由题设知X是完备的,故是第二纲的,必存在某X_k在某开球$N(x_0,\varepsilon)$中稠密,因而$N(x_0,\varepsilon)\subset X_k$.

下面来证本例命题. $\forall\ x\in X$,当$x=\theta$时,$P(x)=0\leqslant M\|x\|$对于一切M都成立. 当$x\neq\theta$时,由前面论断可知

$$x_0+\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\in N(x_0,\varepsilon).$$

从而

$$P\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant P\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)+P(-x_0)\leqslant k+P(-x_0),$$

即
$$P(x)\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x\|[k+P(-x_0)].$$

取 $M=\frac{2}{\varepsilon}[k+P(-x_0)]$，则命题得证.

例6 设 X 是赋范线性空间，A 是从 X 到 X 的线性算子，$D(A)=X$，B 是从 X^* 到 X^* 的线性算子，$D(B)=X^*$，若 $\forall\ x\in X$ 及 $f\in X^*$，均有 $(Bf)(x)=f(Ax)$，证明：A 和 B 都是有界线性算子.

证 固定 $x\in\{x|\ \|x\|\leqslant 1\}$，此时 $|f(Ax)|\leqslant\|Ax\|\ \|f\|$，因而 X^* 上的泛函 $f\to f(Ax)$ 是 X^* 上的有界线性泛函. 对任何固定的 $f\in X^*$，有

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(Ax)|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Bf)(x)|=\|Bf\|,$$

则依共鸣定理可知，对于 $x\in\{x|\ \|x\|\leqslant 1\}$，有

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\ \sup_{\|f\|\leqslant 1}|f(Ax)|<\infty,$$

即泛函族 $\{f\to f(Ax)\}$ 的范数有界. 但是

$$\sup_{\|f\|\leqslant 1}|f(Ax)|=\|Ax\|,$$

所以
$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|<\infty,$$

从而
$$A\in B(X\to X).$$

又由
$$(Bf)(x)=f(Ax)$$

知
$$B=A^*\in B(X^*\to X^*),$$

即 A 和 B 都是有界线性算子.

例7 设 X 是巴拿赫空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_n\}$ 是一列从 $X\to Y$ 的有界线性算子，证明：$M=\{x|\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx\|<\infty\}$ 或为 X，或为 X 中某第一纲集.

证 用反证法证. 设 M 是第二纲的，分解 $M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$，其中 $M_k=\{x|\sup\limits_n\|T_nx\|\leqslant k\}$，则 M_k 为闭集. 因为 M 是第二纲的，故必有

某 k 和 $x_0\in X, r>0$ 存在，使得

$$\{x \mid \| x-x_0 \| < r\} \subset \overline{M}_k = M_k,$$

则对任何 $z\neq\theta$，有

$$y=x_0+\frac{r}{2}\frac{z}{\| z \|}\in M_k,$$

从而 $\left\| T_n\left(\frac{rz}{2\| z \|}\right) \right\| \leqslant \| T_n x_0 \| + \left\| T_n\left(x_0+\frac{rz}{2\| z \|}\right) \right\| \leqslant 2k$，

即 $\| T_n z \| \leqslant \frac{4R}{r} \| z \|$，可见 $M=X$.

于是知，当 M 是第二纲时，$M=X$，否则 M 为 X 中第一纲集.

例 8 设 X 为赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X, \Gamma\subset X^*$，$\Gamma$ 中元的线性组合在 X^* 中稠密，证明 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是：

(1)数列 $\{\| x_n \|\}$ 有界；

(2) $f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$，$\forall\ f\in\Gamma$.

证 必要性 设 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，则 $\forall\ f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x_0)$，因而 $x_n^{**}(f)\to x_0^{**}f(x)$，故由共鸣定理得

$$\sup_n \| x_n \| = \sup_n \| x^{**} \| < \infty,$$

即数列 $\{\| x_n \|\}$ 有界. $\forall\ f\in\Gamma$，$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$ 是显然的.

充分性 设条件成立，则 $\forall\ f\in\Gamma$，有

$$x_n^{**}(f)\to x_0^{**}(f)\quad (n\to\infty). \qquad ①$$

因为 x_n^{**} 与 x_0^{**} 都是线性的，所以式①对一切 $f\in\operatorname{span}\Gamma$ 成立.

$X\ \overline{\operatorname{span}\Gamma}=X$，而 $\sup_n \| x_n^{**} \| <\infty$，所以 $\forall\ f\in X$，有 $x_n^{**}(f)\to x_0^{**}(f)$，即 $f(x_n)\to f(x_0)$，就是 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0.

例 9 设 $1\leqslant p<\infty$，$\{x_n\}\subset L^p[0,1]$，证明 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$ 的充要条件是：

(1) $\{\| x_n \|\}$ 有界； (2) $\int_0^\tau x_n(t)\mathrm{d}t\to\int_0^\tau x_0(t)\mathrm{d}t, \tau\in[0,1]$.

证 必要性 当 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$ 时，由共鸣定理知 $\{\| x_n \|\}$ 有界. 又取 $\chi_{[0,\tau]}\in L^q[0,1]$，则由 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，及 $(L^p)^*=L^q$，可以得出

$$\int_0^1 x_n(t)\chi_{[0,1]}(t)\mathrm{d}t \to \int_0^1 x_0(t)\chi_{[0,1]}(t)\mathrm{d}t,$$

即有
$$\int_0^\tau x_n(t)\mathrm{d}t \to \int_0^\tau x_0(t)\mathrm{d}t,\ \tau\in[0,1].$$

充分性　在$L^q[0,1]$上定义一族泛函g_n和g，即

$$g_n(f)=\int_0^1 f(t)x_n(t)\mathrm{d}t,\quad g(f)=\int_0^1 f(t)x_0(t)\mathrm{d}t,$$

则有$\|g_n\|=\|x_n\|$，$\|g\|=\|x_0\|$. 对于任何$f\in\chi_{[0,1]}$，有条件$\int_0^1 x_n(t)\mathrm{d}t\to\int_0^1 x_0(t)\mathrm{d}t$，即$g_n(f)\to g(f)$. 又因为任何阶梯函数都是形如$\chi_{[0,1]}$的函数的线性组合，所以，对任何阶梯函数必有$g_n(f)\to g(f)$.

由$\{\|x_n\|\}$有界，可知$\{\|g_n\|\}$有界. 又因为阶梯函数全体在$L^q[0,1]$中稠密，故$\forall\ f\in L^q[0,1]$，有$g_n(f)\to g(f)$，从而

$$\int_0^1 f(t)x_n(t)\mathrm{d}t\to\int_0^1 f(t)x_0(t)\mathrm{d}t,\ f\in L^q[0,1],$$

即$x_n \xrightarrow{弱} x_0$.

例10　设T是由巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y的有界线性算子，证明：$T^*Y^*=X^*$的充要条件是T在其值域上有有界逆算子.

证　必要性　用反证法证. 设T在其值域上没有有界逆算子，则必存在X中一点列$\{x_n\}$，有$\|x_n\|=1$，但$\|Tx_n\|\to 0$. 若令

$$z_n=\frac{x_n}{\sqrt{\|Tx_n\|}+1/n},$$

则
$$\|z_n\|\to\infty,$$

且
$$\|Tz_n\|=\|Tx_n\|(\sqrt{\|Tx_n\|}+1/n)^{-1}\to 0.$$

$\forall\ g\in X^*$，取$f\in Y^*$，使得$T^*f=g$，于是

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n)=\lim_{n\to\infty} f(Tz_n)=0,$$

即$\{z_n\}$弱收敛于零. 依共鸣定理，$\{\|z_n\|\}$有界，导出矛盾，故T在其值域上有有界逆算子.

充分性　设逆算子T^{-1}有界,$\forall\ g\in X^*$,令$f(y)=g(T^{-1}y)$, $y\in TX$,则 f 是定义于 TX 上的线性泛函. 因为$|f(y)|\leqslant \|g\|\ \|T^{-1}\|\ \|y\|$,所以$f\in(TX)^*$. 由泛函延拓定理,把$f$ 延拓为Y^*中的元,仍记为f. 又$\forall\ x\in X$,有

$$f(Tx)=g(T^{-1}Tx)=g(x),$$

所以,$g=T^*f$,即证得$T^*Y^*=X^*$.

例11　设X是巴拿赫空间,$\{x_n\}\subset X$,且$\forall\ f\in X^*$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty$,又设数列$\{a_n\}\in C_0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,证明:$\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\}$按范数收敛.

证　记$\Lambda=\{\{\lambda_n\}\mid|\lambda_n|\leqslant 1\}$,则$\forall\ f\in X^*$,任意的$\{\lambda_n\}\in\Lambda$和$n\in\mathbf{N}$,$p\in\mathbf{N}$,有

$$\left|f\left(\sum_{i=n}^{n+p}\lambda_ix_i\right)\right|\leqslant\sum_{i=n}^{n+p}|f(x_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<\infty.$$

故依共鸣定理知

$$\left\{\sum_{i=n}^{n+p}\lambda_ix_i\,\middle|\,\{\lambda_i\}\in\Lambda,n,p\in\mathbf{N}\right\}$$

是X中的有界集,故存在M,使得$\left\|\sum\limits_{i=n}^{n+p}\lambda_ix_i\right\|\leqslant M$,其中$\{\lambda_i\}\in\Lambda$, $n,p\in\mathbf{N}$.

又对$\{a_n\}\in C_0$,记$\lambda_{np}=\sup\limits_{n\leqslant i\leqslant n+p}|a_i|$,于是,在$n\to\infty$时,必有$\lambda_{np}\to 0$,且

$$\left\|\sum_{i=n}^{n+p}a_ix_i\right\|=\left\|\lambda_{np}\sum_{i=n}^{n+p}\lambda_{np}^{-1}a_ix_i\right\|\leqslant\lambda_{np}M\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

由此可知,$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)$是$X$的基本点列,故一定收敛.

例12　设$\{x_n\}$是巴拿赫空间X中的一列元,若$\forall\ f\in X^*$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty$,证明:必存在$M>0$,使得对每个$f\in X^*$,都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant M\|f\|.$$

证 $\forall N\in\mathbf{N},\theta_n\in\mathbf{R}$ 和$\forall f\in X^*$，有

$$\left|\left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}x_n\right)^{**}(f)\right|=\left|f\left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}x_n\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty,$$

则依共鸣定理，必存在$M>0$，使得$\left\|\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}x_n\right\|<M$，从而，可以令$\theta_n=f(x_n)$，使得

$$\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)|=f\left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}x_n\right)\leqslant M\|f\|.$$

这样一来，对一切$f\in X^*$，都有$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<M\|f\|$成立.

例 13 设X_1,X_2是巴拿赫空间X的两个闭子空间，且$\forall x\in X$，有惟一的分解$x=x_1+x_2$，其中$x_1\in X_1,x_2\in X_2$，证明：存在常数C，使得$\|x_1\|\leqslant C\|x\|$，$\|x_2\|\leqslant C\|x\|$对于一切$x\in X$成立.

证 作一个算子$T: X\to X_1, Tx=x_1$，其中$x=x_1+x_2,x_1\in X_1,x_2\in X_2$. 由题设知，分解是惟一的，所以$T$是确定的. 易证$T$是线性的.

设$x^{(n)}\to x\in X, Tx^{(n)}=x_1^{(n)}\to x_1\in X_1$，则有$x=x_1+x_2, x^{(n)}-x_1^{(n)}\in X_2, x^{(n)}-x_1^{(n)}\to x-x_1\in X_2$，从而$Tx=x_1$，故$T$为闭算子. 因为$D(T)=X$，所以由闭图像定理知，$T$是有界算子，从而

$$\|x_1\|=\|Tx\|\leqslant\|T\|\ \|x\|.$$

又 $$\|x_2\|\leqslant\|x\|+\|x_1\|\leqslant(\|T\|+1)\|x\|,$$

故取$C=\|T\|+1$即可证得命题.

例 14 设对于任何$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$均收敛，证明：$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\in l^\infty$.

证 令$f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i$，其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，而$f_n\in$

$(l^1)^*$，且 $\| f_n \| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|$（见本章第二节）. 因为，$\forall\, x\in l^1$，$\sup\limits_n |f_n(x)|<\infty$，而 l^1 是巴拿赫空间，则由共鸣定理可得

$$\sup_n \| f_n \| <\infty \Longrightarrow \sup_n |a_n|<\infty,$$

从而

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\in l^\infty.$$

例 15 设$\{f_\tau\}$是巴拿赫空间 X 上的一族泛函，若对于 X 的每个点 x，$\{f_\tau(x)\}$均是有界集. 证明：$\{f_\tau\}$一致有界，即$\sup\limits_\tau \| f_\tau \| <\infty$.

证 由共鸣定理证明直接可得，只需取 Y 为实数域或复数域.

例 16 设$\{x_\tau\}$是赋范线性空间 X 中的一族元，$\forall\, f\in X^*$，$\sup\limits_\tau |f(x_\tau)|<\infty$. 证明：

$$\sup_\tau \| x_\tau \| <\infty.$$

证 考察 X^* 上一族连续线性泛函$\{x_\tau^{**}\}$，即

$$x_\tau^{**}(f)=f(x_\tau),\quad f\in X^*,$$

由 X^* 的完备性及$\forall\, f\in X^*$，有

$$\sup_\tau |x_\tau^{**}(f)|=\sup_\tau |f(x_\tau)|<\infty.$$

故利用共鸣定理可得$\sup\limits_\tau \| x^{**} \| <\infty$.

又 $\| x^{**} \| = \| x_\tau \|$，所以$\sup\limits_\tau \| x_\tau \| <\infty$.

第七节 线性算子的正则集与谱不变子空间

主要内容

1. 定义1 设λ为一个数，A 是定义域与值域均为 E 的线性算子，若有 E 中非零向量 $x\in D(A)$，使得 $Ax=\lambda x$，则称λ是 A 的**特征值**(**或本征值**)，而称 x 为 A(相应于特征值λ)的**特征向量**(**或本征向量**).

算子 A 的相应于特征值λ的特征向量全体加上零向量称为算

子 A 的相应于特征值 λ 的**特征向量空间**，记做 T_λ.

T_λ 的维数 $\dim T_\lambda$ 称为特征值的 λ 的重复度，是方程 $Ax=\lambda x$ 的最大线性无关解组中向量个数.

2. 定义 2 设 E 是复赋范线性空间，B 是 E 的线性子空间 $D(B)$ 到 E 中的线性算子，又设 λ 是一复数，若 $(\lambda I-B)$ 是正则算子，即 $\lambda I-B$ 是 $D(B)$ 到 E 上的一对一的线性算子，且其逆算子 $(\lambda I-B)^{-1}$ 是 E 到 E 中的有界线性算子时，称 λ 是 B 的**正则点**，并称 $R_\lambda(B)=(\lambda I-B)^{-1}$ 是 B 的**豫解算子**. 不是正则点的复数 λ 称为 B 的**谱点**. 复平面上正则点的全体称为 B 的**正则集**，记做 $\rho(B)$；谱点全体称为 B 的**谱集**（或谱），记做 $\sigma(B)$.

$\sigma(B)\cup\rho(B)$ 即为整个复平面.

定理 1 (1) λ 是 B 的正则点的充要条件是方程 $(\lambda I-B)g=f$ 对于任何 $f\in E$ 都有解，且存在正的常数 m，使得 $\|g\|\leqslant m\|f\|$.

(2) λ 不是 B 的特征值的充要条件是 $\lambda I-B$ 是 E 到 $(\lambda I-B)E$ 上的一一映射（或 $\lambda I-B$ 是可逆算子）；设 λ 不是 B 的特征值，又 E 是有限维空间，则 λ 是 B 的正则点.

定理 2 设 $p(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i$ 是 t 的任意一个多项式，B 是赋范线性空间 E 到 E 的一个有界线性算子，记 $p(B)=\sum_{i=0}^{n}a_iB^i\ (B^0=I)$，又记 $p(\sigma(B))=\{p(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(B)\}$，则 $\sigma(p(B))=p(\sigma(B))$.

定理 3 设 E 是巴拿赫空间，B 是 E 的线性子空间 $D(B)$ 到 E 中的线性算子，则 $\rho(B)$ 为开集. 且对每个 $\lambda_0\in\rho(B)$，记 $r_{\lambda_0}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(\lambda_0I-B)^{-n}\|}$，则圆 $|\lambda-\lambda_0|<1/r_{\lambda_0}$ 含在 $\rho(B)$ 中，且在此圆上 $(\lambda I-B)^{-1}$ 具有展开式

$$(\lambda I-B)^{-1}=\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^v(\lambda_0I-B)^{-(v+1)}(\lambda-\lambda_0)^v. \quad ①$$

特别地，当 $|\lambda-\lambda_0|<1/\|(\lambda_0I-B)^{-1}\|$ 时，λ 落在 $\rho(B)$ 中，式①成立.

3. **定理4**　设B是巴拿赫空间E上的有界线性算子，则$\sigma(B)$是有界闭集，且

$$\sup_{\lambda\in\sigma(B)}|\lambda|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

而当$|\lambda|>\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}$时，有

$$(\lambda I-B)^{-1}=\sum_{v=0}^{\infty}B^v/\lambda^{v+1}. \qquad ②$$

特别地，当$|\lambda|>\|B\|$时，式②成立，且

$$\|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant 1/(|\lambda|-\|B\|).$$

定义3　设E是赋范线性空间，B是E到E的有界线性算子，则$r(B)=\max\limits_{\lambda\in\sigma(B)}|\lambda|$称为$B$的**谱半径**.

定理5　设E是巴拿赫空间，$B(E\to E)$是E上的有界线性算子全体所成的巴拿赫空间，又设$B\in B(E\to E)$，f是$B(E\to E)$上的有界线性泛函，则$f(\lambda I-B)^{-1}$看成λ的函数时是开集$\rho(B)$上的解析函数.

定理6（盖勒范德（И. М. Гельфанд）定理1）　设B是巴拿赫空间E到E的有界线性算子，则

$$r(B)=\sup_{\lambda\in\sigma(B)}|\lambda|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

定理7（盖勒范德定理2）　非零的巴拿赫空间E上的任何有界线性算子必有谱点.

定义4　设B是赋范线性空间E到E的有界线性算子，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}=0$，则称$B$是**广义幂零算子**.

4. **定义5**　设B是赋范线性空间E到E的线性算子，L是E的一个线性子空间，若$BL\subset L$，则称L是B的**不变子空间**.（BL是L经B映射后的集.）

定理8　设B是线性空间E上的线性算子，则有：

(1) $\{0\}$和E是B的不变子空间.

(2)若$\{L_\mu|\mu\in J\}$（J是指标集）中每个L_μ是B的不变子空间，则由一切$L_\mu(\mu\in J)$中的向量张成的线性空间L及它们的通$L'=$

$\bigcap_{\mu\in J} L_\mu$ 都是 B 的不变子空间.

(3)$R(B)$以及$N(B)=\{x|Bx=0\}$是 B 的不变子空间.

(4)若 L 是相应于 B 的某个特征值的某些特征向量张成的线性空间,则L 是B 的不变子空间. 特别地,相应于特征值λ 的特征子空间 T_λ 是不变子空间.

(5)若 B 是赋范线性空间中的有界线性算子,L 是 B 的不变子空间,则 $\overline{L}$ 也是 B 的不变子空间. 特别地,$\overline{R(B)}$是不变子空间.

$\{0\}$和 E 称为平凡的不变子空间.

定理9 设E 是线性空间,A 和B 是E 上的两个可交换的线性算子,则 $R(A)$,$N(A)$必是 B 的不变子空间.

推论 在定理9的条件下,有:

(1)若λ 是 A 的特征值,则相应于λ 的特征子空间T_λ 必是B 的不变子空间;

(2)记$E_n=R(B^n)$,$N_n=N(B^n)$,$n=1,2,\cdots$,则$\{E_n\}$,$\{N_n\}$都是不变子空间.

5. 定义6 设E 是线性空间,U 是$E\to E$ 的某些线性算子组成的算子集. 若L 是E 的一个线性子空间,且它对集U 中每个算子都是不变的,就称 L 是U 的不变子空间. 设 E 是赋范线性空间,$B\in B(E\to E)$,$B(E\to E)$中一切与 B 交换的算子全体记为U_B. 若 E 的线性子空间 L 是 U_B 的不变子空间,则称 L 是 B 的**超不变子空间**.

定理10 设 $B\in B(E\to E)$,E 是赋范线性空间,于是有:

(1)$\{0\}$和 E 是超不变子空间;

(2)若$\{L_\mu|\mu\in J\}$ (J 是指标集)中每个 L_μ 是 B 的超不变子空间,则$\{L_\mu|\mu\in J\}$全体张成的线性子空间及它们的通都是 B 的超不变子空间;

(3)若 L 是 B 的超不变子空间,则 $\overline{L}$ 也是 B 的超不变子空间;

(4)$N(B)$,$R(B)$是 B 的超不变子空间;

(5)若 B 有特征值λ,则相应于λ 的特征子空间 T_λ 是 B 的超不变子空间.

$\{0\}$和 E 是任何有界线性算子的平凡的超不变子空间.

定理 11 在赋范线性空间 E 上,$B(E\to E)$的每个不变子空间必是平凡的.

6. 定义 7 设 E 是线性空间,U 是 $E\to E$ 的某些线性算子所成的一个线性空间,对任一向量 $y\in E$,称集$\{U_y\}=\{Ay \mid A\in U\}$是由向量 y 经 U 循环产生的子空间. 当 E 是赋范线性空间时,称集$\overline{\{U_y\}}$是由向量 y 经 U 循环产生的闭子空间.

定理 12 设 E 是巴拿赫空间,$B\in B(E\to E)$,则对于任何 $y\in E$,$y\neq 0$,由 y 和 U_B 产生的线性子空间$\{U_By\}$,线性闭子空间$\overline{\{U_By\}}$分别是 B 的包含 y 的最小超不变子空间和超不变闭子空间.

定理 13 设 E 是巴拿赫空间,$B\in B(E\to E)$,于是有:

(1)$\{0\}$和 E 是 B 的超不变闭子空间;

(2)任意个 B 的不变(超不变)闭子空间所张成的闭子空间或通都是 B 的不变(超不变)闭子空间;

(3)$N(B)$,$\overline{R(B)}$是 B 的超不变闭子空间;

(4)如果 B 有特征值 λ,相应于 λ 的特征子空间 E_λ 是 B 的超不变闭子空间;

(5)对任何 $y\in E$,$\overline{\{U_By\}}$是 B 的超不变子空间.

疑难解析

1. 算子的特征值与特征向量概念与线性代数中特征值与特征向量概念是否一致?

答 关于算子的特征值与特征向量概念是线性代数中有限维线性空间上线性变换的特征值与特征向量概念在一般线性空间上的拓广,它概括了线性代数、微分方程、积分方程的特征值与特征函数的概念. 从数学角度看,弄清了线性问题的特征值(或更一般的谱)的构造,也就清楚了线性问题解的结构. 不仅许多经典的数学物理问题(如微分方程、积分方程、变分方程问题)可以归结为求特征值、特征向量问题,在量子物理学中的许多重要问题,也是求

特征值与求特征向量的问题．从而，可以认为弄清了算子谱的分布，也就清楚了系统的稳定性．

2．关于 $\lambda I-T$ 有哪些不同情形？

答 关于 $\lambda I-T$ 有以下几种情形：

(1)$(\lambda I-T)^{-1}$不存在，则 λ 是 T 的特征值；

(2)$(\lambda I-T)^{-1}$存在，且 $R(\lambda I-T)$（$\lambda I-T$ 的值域）$=E$（定义域），$(\lambda I-T)^{-1}\in B(E\to E)$，则 λ 是 T 的正则点，$(\lambda I-T)^{-1}=R_\lambda(T)$是 T 的豫解算子；

(3)若$(\lambda I-T)^{-1}$存在但无界，$R(\lambda I-T)\neq E$，$\overline{R(\lambda I-T)}=E$，则称 λ 为 T 的连续谱；

(4)若$(\lambda I-T)^{-1}$存在且$\overline{R(\lambda I-T)}\neq E$，则称 λ 为 T 的剩余谱．

T 的谱集$\sigma(T)$中点可分为三类：上述情形(1)中所含 λ 点的集合记为$\sigma_p(T)$，称为 T 的点谱，记做 $\sigma_p(B)$；T 的连续谱全体记做 $\sigma_c(T)$；T 的剩余谱全体记做 $\sigma_r(T)$，则 $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$．

无穷维空间中算子可能有剩余谱．

3．谱半径 $r(B)$的意义是什么？

答 若 B 是赋范线性空间 E 到 E 的有界线性算子，则 $r(B)=\max\limits_{\lambda\in\sigma(B)}|\lambda|$ 称为 B 的谱半径．谱半径 $r(B)$就是包含谱 $\sigma(B)$的以原点为中心的最小闭圆的半径，其明显的意义是：当 $|\lambda|>r(B)$时，λ 是 B 的正则点，因而方程$(\lambda I-B)g=f$ 对任何 $f\in E$ 有惟一解 g．而对 $|\lambda|\leqslant r(B)$，就不能保证上述方程对任何 $f\in E$ 都有解了．

苏联数学家盖勒范德指出：

$$r(B)=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

方法、技巧与典型例题分析

本节的内容比较多．先讨论矩阵的特征值与特征向量问题．

例 1 求下列矩阵的特征值与特征向量：

(1)$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$；　　(2)$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$，$a,b$ 为实数，$b\neq 0$.

解　利用线性代数方法即可求解.

(1)由于

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -8 & 11-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-9)\Rightarrow \lambda_1=3,\lambda_2=9.$$

代入 $\lambda_1=3$ 得，$-\xi_1+\xi_2=0$，解得特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；代入 $\lambda_2=9$ 得，$-4\xi_1+\xi_2=0$，解得特征向量$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

(2)请读者利用类似方法自行求解.

例 2　证明：埃尔米特矩阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的特征值均为实的.

证　由 $Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$，得

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax=\overline{x}^{\mathrm{T}}\lambda x=\lambda\,\overline{x}^{\mathrm{T}}x\Rightarrow \lambda=(\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax)/(\overline{x}^{\mathrm{T}}x).$$

由于$\overline{x}^{\mathrm{T}}x$ 为实的，且

$$\overline{(\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax)}=\overline{(\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax)^{\mathrm{T}}}=(x^{\mathrm{T}}\overline{A}\,\overline{x})^{\mathrm{T}}=\overline{x}^{\mathrm{T}}\,\overline{A}^{\mathrm{T}}x=\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax,$$

所以，λ 是实的.

例 3　证明：酉矩阵的特征值的绝对值(或模)等于 1.

证　由 $Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$，得

$$(\overline{Ax})^{\mathrm{T}}=\overline{x}^{\mathrm{T}}\,\overline{A}^{\mathrm{T}}=\overline{\lambda}\,\overline{x}^{\mathrm{T}},\quad (\overline{Ax})^{\mathrm{T}}=\overline{x}^{\mathrm{T}}A^{-1},$$

故
$$\overline{x}^{\mathrm{T}}A^{-1}\cdot Ax=\overline{\lambda}\,\overline{x}^{\mathrm{T}}\cdot\lambda x\Rightarrow \overline{x}^{\mathrm{T}}x=|\lambda|^2\,\overline{x}^{\mathrm{T}}x,$$

于是
$$\lambda^2=(\overline{x}^{\mathrm{T}}x)/(\overline{x}^{\mathrm{T}}x)=1.$$

例 4　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶方阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的 n 个特征值，其中某些或全部 λ_j 可以是相等的，证明：各特征值之积等于 $\det A$，其和等于 A 的迹.

证　因为 n 阶方阵 A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ \alpha_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n}-\lambda \end{vmatrix}=\beta_n\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_0=0,$$

故 $\beta_n=(-1)^n$, $\beta_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn})$,

$$\beta_0=\det A.$$

又

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^n\frac{\beta_0}{\beta_n}=\det A,$$

$$\operatorname{trace}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-\beta_{n-1}/\beta_n=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}.$$

例5 证明：方阵A 的逆A^{-1}存在的充要条件是A 的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均异于零. 若A^{-1}存在，则A^{-1}的特征值为$1/\lambda_1,1/\lambda_2,\cdots,1/\lambda_n$.

证 因为 A^{-1}存在$\Longleftrightarrow\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq0$，所以 A^{-1}存在$\Longleftrightarrow$ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$均异于零.

若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，A^{-1}存在，则对 $Ax_k=\lambda_kx_k$ 左乘 A^{-1}，得

$$A^{-1}x_k=(1/\lambda_k)x_k\Longrightarrow1/\lambda_k\text{ 为 }A^{-1}\text{的特征值}.$$

例6 在有限维赋范线性空间X 上定义线性算子$T:X\to X$. 证明：对于X 的不同基，T 的表示矩阵均有相同的特征值.

证 设$e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$与$e'=(e_1',e_2',\cdots,e_n')$是$X$ 的任意两个基，由基的定义知，存在满秩方阵C，使$e'=eC$.

由于$\forall\ x\in X$，对每一基均有惟一表示式，则

$$x=ex_1=\sum\xi_je_j=e'x_2=\sum\xi_k'e_k',$$

其中$x_1=(\xi_j)$，$x_2=(\xi_k')$为列向量，由$e'=eC$ 有

$$ex_1=e'x_2\Longrightarrow x_1=Cx_2$$

类似地，对$Tx=y=ey_1=e'y_2$，亦有 $y_1=Cy_2$.

若T_1 与T_2 分别表示e 与e'下的矩阵，则

$$y_1=T_1x_1,\quad y_2=T_2x_2$$

并

$$CT_2x_2=Cy_1=T_1x_1=T_1Cx_2$$

左乘C^{-1}，得$T_2=C^{-1}TC$. 因为

$$\begin{aligned}\det(T_2-\lambda I)&=\det(C^{-1}T_1C-\lambda C^{-1}IC)=\det[C^{-1}(T_1-\lambda I)C]\\&=\det(C^{-1})\det(T_1-\lambda I)\det C=\det(T_1-\lambda I),\end{aligned}$$

故T_1 与T_2 有相同的特征值.

例7 设E 是$C[0,1]$，$D(A)$是$[0,1]$上具有二阶连续导函数

且适合边界条件 $x(0)=x(1)$，$x'(0)=x'(1)$ 的函数 x 全体，定义 $D(A)$ 到 E 上的微分算子 A 为 $Ax=-x''$，$x\in D(A)$，求特征值与特征向量.

解 微分方程 $-x''=\lambda x$ 的通解是

$$x(t)=a\cos\sqrt{\lambda}\,t+b\sin\sqrt{\lambda}\,t.$$

当 $\lambda\neq(2n\pi)^2$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，通解中除恒为零的外，不可能有函数属于 $D(A)$（即适合条件 $x(0)=x(1)$，$x'(0)=x'(1)$）.

当 $\lambda=(2n\pi)^2$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，上述通解全体属于 $D(A)$. 因此，算子 A 具有特征值 $(2n\pi)^2$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 相应的特征向量空间的基为 $\cos(2n\pi t)$，$\sin(2n\pi t)$.

例 8 设 E 是 $[-1,1]$ 上的连续函数全体，$D(A)$ 是在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导函数的函数 x 的全体，在 $D(A)$ 上定义算子 A 为 $Ax=[(t^2-1)x']'$，$x\in D(A)$，t 为 $x(t)$ 的自变数，求特征值与特征向量.

解 由二阶微分方程理论可求得方程

$$[(t^2-1)x']'-\lambda x=0,$$

当 $\lambda\neq n(n+1)$ 时，没有二阶连续可微的非零解 $x(t)$. 当 $\lambda=n(n+1)$ 时，方程的解为

$$x(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$$

的常数倍，$x(t)$ 称为 n 阶的勒让德(Legendre)多项式. 因此，算子 A 只有特征值 $n(n+1)$，$n=1,2,\cdots$. 相应的特征向量，除一常数因子外为勒让德多项式.

例 9 设 $E=L^2(0,\infty)$（复值的），$D(A)=\{x\mid x\in E,x''\in E\}$，$D(A)$ 到 E 的算子 A 为 $Ax=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$，$x\in D(A)$，求特征量与特征向量.

解 由于 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)=k^2x(t)$ 的通解为 $x=C_1\mathrm{e}^{kt}+C_2\mathrm{e}^{-kt}$，所以 $x\in D(A)$ 的充要条件是：$\mathrm{Re}k>0,C_1=0$ 或 $\mathrm{Re}k<0,C_2=0$. 从而 λ 为算

子 A 的特征值的充要条件是 $\lambda=k^2$，$\mathrm{Re}k\neq0$，即 λ 非负，且相应的特征向量形如：

$$x(t)=a\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t},\quad \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}=0.$$

因而重复度是1.

本例说明特征值全体可以组成区域.

但有时 A 没有特征值，例如，取 $E=C[a,b]$，A 为

$$Ax=\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad x\in C[a,b].$$

从方程
$$\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau=\lambda x(t),\quad x\in C[a,b]$$

可知，对任何 λ，方程解 $x(t)\equiv0$，故 A 无特征值.

例10 设 H 是希尔伯特空间，$T\in B(H)$，若 $\|T\|<1$，证明：$(I-T)^{-1}$ 存在，在 H 上有界，且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\cdots+T^n+\cdots$$

右端级数按算子范数收敛，且

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant1/(1-\|T\|).$$

证 先证 $\sum_{k=0}^{\infty}T^k$ 收敛. 因为 $T\in B(H)$，故 $T^k\in B(H)$，$k=1,2,\cdots$. 令 $S_n=\sum_{k=0}^{n}T^k$，$n=1,2,\cdots$，则由于 $\|T\|<1$，而 $\|T^k\|\leqslant\|T\|^k$，所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k$ 收敛，从而

$$\|S_n-S_{n+p}\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}T^k\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\|T\|^k\to0,\quad n\to\infty,$$

即 $\{S_n\}$ 是 $B(H)$ 中的柯西序列. 而 $B(H)$ 为巴拿赫空间，故存在 $S\in B(H)$，使得

$$\sum_{k=0}^{n}T^k=S_n\to S,\quad n\to\infty,$$

即
$$S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k\in B(H).$$

再证$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k$. 因为

$$S_n(I-T)=(I-T)S_n=I-T^{n+1},$$

而$\|T\|^{n+1}\geqslant\|T^{n+1}\|$，故$\|T^{n+1}\|\to 0\quad(n\to\infty)$，则

$$S(I-T)=(I-T)S=I\Rightarrow(I-T)^{-1}=S,$$

$$\|(I-T)^{-1}\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}T^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k=1/(1-\|T\|).$$

例11 证明：巴拿赫空间X上的有界线性算子的豫解集$\rho(T)$为开集，即其谱$\sigma(T)$为闭集.

证 若$\rho(T)=\varnothing$，即$\rho(T)$为开集.

设$\rho(T)\neq\varnothing$，则对固定的$\lambda_0\in\rho(T)$与任一$\lambda\in C$，有

$$T-\lambda I=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I=(T-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}].$$

令
$$V=[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}]=I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0},$$

则上式可写为$T_\lambda=T_{\lambda_0}V$. 由$\lambda_0\in\rho(T)$且T有界可知，$R_{\lambda_0}=T_{\lambda_0}^{-1}\in B(X)$对于所有的$\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$，即

$$\|\lambda-\lambda_0\|<1/\|R_{\lambda_0}\|$$

中的λ，知V在$B(X)$中(见例7)有

$$V^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_{\lambda_0}^k.$$

再由$T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X)$知，对满足$T_\lambda=T_{\lambda_0}V$及$|\lambda-\lambda_0|<1/\|R_{\lambda_0}\|$的$\lambda$，算子$T_\lambda$存在逆算子

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0},$$

从而知$|\lambda-\lambda_0|<1/\|R_{\lambda_0}\|$表示$T$的正则集为$\lambda_0$的一邻域. 由$\lambda_0\in\rho(T)$为任意知$\rho(T)$为开集，从而其余集$\sigma(T)=C-\rho(T)$为闭集.

例12 证明：复的巴拿赫空间X上的有界线性算子T的谱$\sigma(T)$为圆盘$|\lambda|\leqslant\|T\|$上的紧集(从而$\rho(T)\neq\varnothing$).

证 设$\lambda\neq 0$且$k=1/\lambda$，由例7得

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-1/\lambda\cdot(I-kT)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(kT)^j=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(T/\lambda)^j.$$

级数对于满足 $\|T/\lambda\|=\|T\|/|\lambda|<1$ 即 $|\lambda|>\|T\|$ 的所有 λ 收敛，且 $\lambda\in\rho(T)$. 因此，谱 $\sigma(T)=C-\rho(T)$ 必在圆盘 $|\lambda|\leqslant\|T\|$ 中，故 $\sigma(T)$ 有界. 又由例 8 知 $\sigma(T)$ 为闭集，所以 $\sigma(T)$ 为紧集.

例 13 设 $T\in B(H)$，证明：若 $|\lambda|\geqslant\|T\|$，则 $\lambda\in\rho(T)$，即 $|\lambda|\geqslant\|T\|$ 时，$(\lambda I-T)^{-1}$ 存在，在 H 上有界，且

$$R_\lambda(T)=\sum_{k=0}^{\infty}(T^k/\lambda^{k+1})\in B(H),\quad \|R_\lambda(T)\|\leqslant 1/(|\lambda|-\|T\|).$$

证 当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，由于 $\|T\|/\|\lambda\|<1$，由例 7 知

$$(I-T/\lambda)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(T/\lambda)^k\in B(H),$$

故
$$R_\lambda(T)=\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\in B(H).$$

从而可得

$$\|R_\lambda(T)\|=\frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\|T/\lambda\|}=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|},$$

即知 $R_\lambda(T)$ 可展成算子值的洛朗(Laurent)级数.

例 14 H 是复希尔伯特空间，$T\in B(H)$，证明：

(1) 设 $\lambda,\mu\in\rho(T)$，则有豫解公式

$$R_\lambda(T)-R_\mu(T)=(\mu-\lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T);$$

(2) $R_\lambda(T)$ 在 $\rho(T)$ 内是算子值解析函数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}R_\lambda(T)=-R_\lambda(T)^2.$$

证 (1) $R_\lambda(T)-R_\mu(T)$

$$=R_\lambda(T)(\mu I-T)R_\mu(T)-R_\lambda(T)(\lambda I-T)R_\mu(T)$$
$$=R_\lambda(T)(\mu-\lambda)R_\mu(T)=(\mu-\lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

(2) 证 $R_\lambda(T)$ 是连续的. 任取 $\lambda\in\rho(T)$，当

$$|\lambda-\lambda_0|<[2\|R_{\lambda_0}(T)\|]^{-1}$$

即
$$|\lambda-\lambda_0|\,\|R_{\lambda_0}(T)\|\leqslant 1/2$$

时，由例 7(将$(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(T)$当作其中的$-T$)有

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(T)\| &\leqslant \|R_{\lambda_0}(T)\| \ \|[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(T)]^{-1}\| \\ &\leqslant 2\|R_{\lambda_0}(T)\|.\end{aligned}$$

于是由题(1)可得

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)\| &\leqslant |\lambda-\lambda_0| \ \|R_\lambda(T)\| \ \|R_{\lambda_0}(T)\| \\ &\leqslant 2\|R_{\lambda_0}(T)\|^2|\lambda-\lambda_0| \to 0, \ \lambda\to\lambda_0,\end{aligned}$$

所以，$R_\lambda(T)$关于λ连续，由题(1)与$R_\lambda(T)$的连续性可知，$R_\lambda(T)$可导，且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}R_\lambda(T)\Big|_{\lambda=\lambda_0} &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T) = -R_{\lambda_0}(T)^2.\end{aligned}$$

第八节　全连续算子的谱分析

主 要 内 容

1. **定义 1**　设A是线性空间E映射到线性空间F的线性算子，如果AE是F中的有限维子空间，则称A为**有限秩算子**.

定义 2　设A是赋范线性空间E映射到线性空间F中的算子，若A把E中任何有界集映射成致密集，则称A是**全连续算子**(或**致密算子**).

定理 1　设E,F是赋范线性空间，则$C(E\to F)$是$B(E\to F)$的线性子空间. 若F是巴拿赫空间，则$C(E\to F)$是巴拿赫空间$B(E\to F)$的线性闭子空间. $C(E\to F)$表示E上到F的全连续算子全体. $B(E\to F)$表示由X到Y的有界线性算子全体.

定理 2　设E,F是赋范线性空间，$A\in C(E\to F)$，那么：

(1)AE必是F中的可分集；

(2)若G是赋范线性空间，$B\in B(F\to G)$，$C\in B(G\to E)$，则BA

$\in C(E\to G)$，$AC\in C(G\to F)$；

(3)$A^*\in C(F^*\to E^*)$.

2. 定理3 设A是巴拿赫空间E上的全连续算子，λ是非零复数，若$(\lambda I-A)E=E$，则λ是算子A的正则点.

定理4 设A是巴拿赫空间E上的全连续算子，λ是非零复数，则$R(\lambda I-A)$是E的闭子空间.

定理5 设A是巴拿赫空间E上的全连续算子，$\lambda\neq 0$，且不是A的特征值，则λ必是A的共轭算子A^*的正则点.

3. 定义3 设E是赋范线性空间，E^*是E的共轭空间，$\forall\ x\in E, f\in E^*$，如果$f(x)=0$，则称$x$和$f$是相互正交的.

定理6 设A是赋范线性空间E上的有界线性算子，一切与AE中所有向量正交的$f\in E^*$，必满足$A^*f=0$. 特别地，当AE在E中不稠密时，0必是A^*的特征值.

定理7(黎斯-啸德尔(Riesz-Szauder)定理) 设E是巴拿赫空间，A是E上全连续算子，则：

(1)当E是无限维空间时，0必是A的谱点；

(2)全连续算子的非零谱点必是特征值；

(3)当$\lambda\neq 0$且是A的特征值时，与λ相应的特征向量空间必是有限维的；

(4)设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的不同的特征值，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的特征向量，则$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性无关的；

(5)$\sigma(A)$的极限点只可能是0(因而$\sigma(A)$是有限集或可列集).

定理8 设E为巴拿赫空间，A为E上全连续算子，则：

(1)$\sigma(A)=\sigma(A^*)$，即$\sigma(A^*)=\{\lambda\mid\lambda\in\sigma(A)\}$；

(2)$\lambda\neq\mu$，则A的相应于λ的特征向量x与A^*的相应于μ的特征向量f正交，即$f(x)=0$；

(3)设λ是A的非零特征值，则方程$(\lambda I-A)x=y$可解的充要条件是y与A^*的任一相应于λ的特征向量f正交；

(4)如果λ为A的非零特征值，则共轭方程$(\lambda I-A^*)\varphi=f$可

解的充要条件是 f 与 A 的任一相应于 λ 的特征向量 y 正交.

4. 定理 9 设 E 是复的巴拿赫空间，$B\in B(E\to E)$，$B\neq\alpha I$（α 是常数），如果有一个非零的全连续算子 A 与 B 交换，则 B 必有非平凡的超不变闭子空间.

推论 1 设 E 是无限维复巴拿赫空间，$B\neq 0$，且是全连续的，B 必有非平凡超不变闭子空间，因而 B 有非平凡的不变闭子空间.

推论 2 设 E 是无限维复巴拿赫空间，$B\in B(E\to E)$，若存在多项式 $p(t)$，使得 $p(B)$ 为非零的全连续算子，则 B 必有非平凡的超不变子空间.

疑 难 解 析

怎样理解全连续算子？

解 全连续算子的概念源于积分方程的研究. 若算子 A 将赋范线性空间中的每个有界集映为线性赋范空间中的致密集（相对列紧集），则称 A 是全连续算子.

全连续算子 $A:X\to Y$ 的一个等价定义是，A 是线性的，且对 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$ 在 Y 中有收敛的子列.

由定义可以推出，全连续算子必是连续线性算子. 事实上，相对列紧集是有界的，因此 A 把集 $S=\{z\mid \|z\|=1,z\in X\}$ 映成 Y 中的一个有界集，即存在常数 $K>0$，使得 $\|Tz\|\leqslant K$，$\forall z\in S$. 从而 $\forall x\in X,x\neq\theta$，有

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant K \quad \text{或} \quad \|Tx\|\leqslant K\|x\|.$$

后一等式对 $x=\theta$ 也成立，于是

$$\|Tx\|\leqslant K\|x\|,\ \forall x\in X,$$

即 T 连续（有界）. 全连续算子是具有较强性质的算子.

方法、技巧与典型例题分析

例1 设 $K(t,s)$ 是方形域 $R=\{(t,s)\mid a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b\}$ 上的连

续函数，定义算子 $A: C[a,b]\to C[a,b]$ 如下：

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\ \forall\ x\in C[a,b],$$

证明：A 是全连续算子.

证 设 E 是 $C[a,b]$ 中的任一有界集，则有常数 $M>0$，使得对一切 $x\in E$，有 $\|x\|\leqslant M$，且

$$|Ax(t)|\leqslant\int_a^b|K(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s\leqslant kM(b-a),\forall\ x\in E,$$

其中 $h=\max\limits_{(t,s)\in R}|K(t,s)|$. 这说明 $AE=\{Ax|x\in E\}$ 一致有界. 同时，$\forall\ \varepsilon>0$，由 $K(t,s)$ 在域 R 上的一致连续性可知，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，使得对于每个 $s\in[a,b]$ 及任何 $t_1,t_2\in[a,b]$，只要 $|t_1-t_2|<\delta$，有

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)},$$

从而

$$|Ax(t_1)-Ax(t_2)|\leqslant\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|\mathrm{d}s<\varepsilon,$$

$$\forall\ Ax\in AE.$$

即知集 AE 是同等度连续的，故由阿尔赞拉-阿斯考利(Arzela-Ascoli)定理知，AE 是 $C[a,b]$ 中的相对列紧集，所以 A 是全连续算子.

例2 无限维赋范线性空间 X 的单位算子 I 是连续算子，证明：它不是全连续算子.

证 设 $S=\{x|\ \|x\|<1\}$ 是 X 中的“单位球”，则 S 是 X 中的一个有界集，I 把 S 映为 S. 任取一点 $x_1\in S$，$\|x_1\|=1$，令 $X_1=\mathrm{span}\{x_1\}$，可以证明 X_1 是 X 的完备子空间，$\overline{X}_1=X_1$. 由于 $X_1\neq X$，取 $x'\in X-X_1$，则 $\rho(x',X_1)=d>0$. 于是，存在 $x''\in X_1$，使得 $\|x'-x''\|<2d$. 记 $x_2=\dfrac{x'-x''}{\|x'-x''\|}$，则 $\|x_2\|=1$，$x_2\in S$. 由于

$$x''+\|x'-x''\|x\in X_1,\ \forall\ x\in X_1,$$

有 $$\|x_2-x\|=\frac{1}{\|x'-x''\|}\|x'-(x''+\|x'-x''\|x)\|$$

$$\geqslant \frac{d}{\| x' - x'' \|} \geqslant \frac{1}{2}, \ \forall \ x \in X_1,$$

故

$$\| x_2 - x_1 \| \geqslant \rho(x_2, X_1) > \frac{1}{2}.$$

再令 $X_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$，$X_2 \neq X$，仿照上面的讨论，可以选取 $x_3 \in S$，$\| x_3 \| = 1$，使得

$$\| x_3 - x_i \| \geqslant \rho(x_3, x_2) > \frac{1}{2}, \ i = 1, 2.$$

如此继续，可得点列 $\{x_k\} \subset S$，$\| x_k \| = 1$，以及 X 的一个子空间序列 $\{X_k\}$，$X_k = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，

$$\| x_k - x_i \| \geqslant \rho(x_k, x_{k-1}) > \frac{1}{2},$$

$$i = 1, 2, \cdots, k-1, \ k = 1, 2, \cdots.$$

显然，点列 $\{x_k\}$ 没有收敛的子列，从而 S 不是相对列紧集，单位算子 I 不是全连续算子.

例3 乘法算子 $Tx(t) = \alpha(t)x(t)$ 在空间 $C[a,b]$ 上是否是全连续算子？设 $\alpha(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

答 否. 因为 $\alpha(t) \in C[a,b]$，令

$$m = \min_{t \in [a,b]} \alpha(t), \quad M = \max_{t \in [a,b]} \alpha(t),$$

则 $\alpha(t)$ 的值域为 $[m, M]$. 易证 $\sigma(T) = [m, M]$，故 T 不是全连续算子.

例4 乘法算子 $Tx(t) = \alpha(t)x(t)$ 是否是 $L^2[a,b]$ 上全连续算子？设 $\alpha(t)$ 是 $[a,b]$ 上有界可测函数.

答 否. 设 $\alpha(t)$ 不全等于零，若 T 为全连续算子，则必存在 $\lambda_0 \neq 0$，使得集合 $E(t \in [a,b] | \alpha(t) = \lambda_0)$ 的测度大于零，否则对于一切 $\lambda \neq 0$，有

$$mE(t \in [a,b] | \alpha(t) = \lambda) = 0.$$

可知 λ 不是 T 的特征值，从而属于正则集，故 $\sigma(T) = \{0\}$，$T = 0$，推出矛盾. 当 $mE(t \in [a,b] | \alpha(t) = \lambda_0) > 0$ 时，λ_0 必是 T 的特征值，且 T 的对应于 λ_0 的特征向量空间是无穷维的，与 T 为全连续矛盾，故

T 不是全连续算子.

例 5 证明:公式 $Jx=x$ 作用的嵌入算子 $J:C^1[0,1]\to C[0,1]$是全连续算子,$C^1[0,1]$中的范数规定为

$$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x(t)|.$$

证 设 A 为 $C^1[0,1]$中任一有界集,则存在常数 $K>0$,使得当 $x\in A$ 时,有

$$\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\leqslant K,\quad \max_{t\in[0,1]}|x'(t)|\leqslant K,$$

则 JA 是 $C[0,1]$中的有界集,且等度连续,故 JA 是 $C[0,1]$中的列紧集,J 是全连续算子.

例 6 证明:由 l^2 到 l^1 的有界线性算子是全连续算子.

证 因为 l^2 可分,自共轭,所以 $S=\{x\in l^2\mid\|x\|\leqslant1\}$ 必是弱*列紧集,即存在 $\{x_n\}\in S$,使得

$$x_n\xrightarrow{w^*}x\Longleftrightarrow x_n\xrightarrow{w}x.$$

T 是有界线性算子,则 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$.

由于 l^1 中弱收敛等价于强收敛,故 $Tx_n\xrightarrow{S}Tx$,从而 T 必是全连续线性算子.

例 7 设 E,E_1 均为赋范线性空间,$T\in B(E,E_1)$,证明:若 T^* 是全连续的,则 T 也是全连续的.

证 因为 $T^{**}\in B(E^{**},E_1^{**})$是全连续算子,而 $x\in E$ 时,有 $Tx=T^{**}x^{**}$,故 T 也是全连续算子.

例 8 设 $\{e_n\}$是完备内积空间 X 中的就范直交系,$\lambda_n\to 0$ $(n\to\infty)$,且 λ_n 为实数. 令

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,$$

证明:T 是全连续自伴算子.

证 令 $T_nx=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x,e_k)e_k$,易证 T_n 是定义在 X 上的有界对

称算子，$\|T_n\|\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k|$，且$T_n$是有穷秩算子，由

$$\|(T_n-T)x\|^2=\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k(x,e_k)e_k,\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k(x,e_k)e_k\Big)$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k^2|(x,e_k)|^2\leqslant\max_{n+1\leqslant k<\infty}\lambda_k^2\|x\|^2,$$

故
$$\|T_n-T\|\leqslant\sqrt{\max_{n+1\leqslant k<\infty}\lambda_k^2}.$$

由$\lambda_k\to0\ (n\to\infty)$，即得$\|T_n-T\|\to0\ (n\to\infty)$，故$T$是全连续算子. 因为

$$(Tx,y)=\lim_{n\to\infty}(T_nx,y)=\lim_{n\to\infty}(x,T_ny)=(x,Ty),\ \forall\ x,y\in T.$$

所以T为全连续自伴算子.

第三章　希尔伯特空间的几何学

第一节　内积空间　希尔伯特空间

主 要 内 容

1. 定义1　设Λ是实数域或复数域，H是Λ上的线性空间. 如果对于H中的任何两个元x,y，都对应一个数$(x,y)\in\Lambda$，满足以下条件：

(1)共轭对称性　对任何$x,y\in H$，有$(x,y)=\overline{(y,x)}$，

(2)对第一变元的线性　对任何$x,y,z\in H$及任何数$\alpha,\beta\in\Lambda$，有

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$$

成立，

(3)正定性　$\forall\ x\in H,(x,x)\geqslant 0$，且$(x,x)=0$的充要条件是

$$x=\theta,$$

则称(x,x)为H中的**内积**. 如果H上定义了内积，则当Λ是实(或复)数域时，称H为实(或复)的**内积空间**. (有的教材将内积(x,x)记做$\langle x,x\rangle$.)

内积对第二变元来说是共轭线性的，即$\forall\ x,y,z\in H$，及任何$\alpha,\beta\in\Lambda$，有

$$(z,\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}(z,\alpha)+\bar{\beta}(z,y).$$

2. 定理1　若H为内积空间，则$\forall\ x,y\in H$，有

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y).\qquad ①$$

式①也称为许瓦兹(Schwarz)不等式.

定理 2 设 H 为内积空间,则内积关于两个变元都是连续的. 即当 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ 时,$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

定义 2 完备的内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间.

定义 3 范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 称为由内积(x,x)导出的范数.

3. 定理 3 当 H 是实内积空间时,有

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\ x,y\in H. \qquad ②$$

当 H 是复内积空间时,有

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 +\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2). \qquad ③$$

式②与式③称为**极化恒等式**.

定理 4(平行四边形公式) 若 H 是内积空间,$\|\cdot\|$ 是由内积导出的范数,则$\forall\ x,y\in H$,有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

疑 难 解 析

1. 什么是内积与内积空间?

答 在实(或复)的欧几里德空间 E^n 中,对于任意两个向量(元)$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$;规定内积$(x,y)=x_1\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2+\cdots+x_n\overline{y}_n$. 有了内积概念,可以利用它建立 E^n 中的欧几里德几何学. 例如向量的交角、垂直、投影等几何概念都可以由内积表述.

定义了内积的空间称为内积空间. 内积空间是一种重要的空间,在微分方程、概率论、数学物理、量子物理等学科中有广泛而重要的应用. 内积空间是一类重要的赋范线性空间,它的范数 $\|\cdot\|$ 由内积导出,满足平行四边形公式. 赋范线性空间成为内积空间的条件是范数要满足平行四边形公式.

2. 如何在满足平行四边形公式的赋范线性空间上引入内积?

答 若范数 $\|\cdot\|$ 确是由内积导出的,则极化恒等式必然成

立. 这时,规定在实赋范线性空间中

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

成立,规定在复赋范线性空间中

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)$$

成立,然后验证(* , *)确实满足内积的三个条件. 在证明定义1中条件(2)(对第一变元的线性)时,要利用 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式这一内积空间中范数的特征性质.

方法、技巧与典型例题分析

要求理解内积、内积空间、希尔伯特空间等概念,熟悉内积空间的极化恒等式与平行四边形公式,并能利用它们证明一些简单命题.

例1 设 X 是实内积空间,证明:

$$\|x\|=\|y\|\Longrightarrow(x+y,x-y)=0.$$

若 $X=\mathbf{R}^2$,这在几何上意味什么? 若 X 是复的,又意味什么?

证 由 $\|x\|=\|y\|\Longrightarrow(x,x)=(y,y)$,由 X 是实内积空间知,$(x,y)=(y,x)$,故

$$(x+y,x-y)=(x,x)+(y,x)-(x,y)-(y,y)=0.$$

当 $X=\mathbf{R}^2$ 时,表示若平行四边形的边相等,则两对角线互相垂直. 当 X 是复内积空间时,有 $\mathrm{Re}(x+y,x-y)=0$.

例2 设 X 是内积空间,证明:$\forall\ x,y,z\in X$,有

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2.$$

证 $\|z-x\|^2+\|z-y\|^2$

$$=\frac{1}{2}[\|(z-x)-(z-y)\|^2+\|(z-x)+(z-y)\|^2]$$

$$=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+\frac{1}{2}\|2z-(x+y)\|^2$$

$$=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2.$$

证明过程利用了平行四边形公式. 此式又称为阿波罗尼乌斯(Appolonius)恒等式.

例 3 若 X 为有穷维向量空间,且 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基,证明:X 上的内积完全由数值 $r_{ij}=(e_i,e_j)$ 确定. 并问:能任意选择 r_{ij} 吗?

证 设 $x,y\in X$,$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,则

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n,\quad y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\cdots+\eta_ne_n,$$

故 X 上的内积 (x,y) 完全由数值 $r_{ij}=(e_i,e_j)$ 确定.

$$r_{ij}=(e_i,e_j)=\overline{(e_j,e_i)}=\overline{r_{ji}},$$

故 r_{ij} 不能任意选择.

例 4 证明:当 $p\neq2$ 时,l^p 不成为内积空间.

证 因为平行四边形公式是内积空间的范数的特征性质,因此,只要在 l^p 中能找出两个元,使平行四边形公式不成立,即可得出 $l^p(p\neq2)$ 不是内积空间.

取 $$x=(1,0,\cdots),\quad y=(0,1,0,\cdots),$$

显然 $$\|x\|=\|y\|=1.$$

又由 $$x+y=(1,1,0,\cdots),\quad x-y=(1,-1,0,\cdots),$$

得 $$\|x+y\|=\|x-y\|=2^{1/p}.$$

当 $p\neq2$ 时,有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\times2^{2/p}\neq2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4,$$

所以,$l^p(p\neq2)$ 不是内积空间.

例 5 证明:$C[a,b]$ 不成为内积空间.

证 因为 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$,取 $x(t)=1$,$y(t)=\frac{t-a}{b-a}$,则

$$\|x\|=\|y\|=1,$$

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a},\quad x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a},$$

$$\|x+y\|=2,\quad \|x-y\|=1,$$

所以 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5\neq 2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$，
故 $C[a,b]$ 不是内积空间.

例6 证明：$L^2[a,b]$ 是希尔伯特空间.

证 任取一柯西列 $\{f_n\}\subset L^2[a,b]$，则 $\{f_n\}$ 必有一子列满足

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|<2^{-k},\quad k=1,2,\cdots.$$

令

$$g_i=\sum_{k=1}^{i}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,\quad g=\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,$$

则

$$\forall\, i\in\mathbf{N},\quad \exists\|g_i\|<1.$$

由法都引理可得 $\|g\|\leqslant 1$. 因此，对于几乎所有的 $x\in[a,b]$，有 $|g(x)|<\infty$，且级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]$$

对于几乎所有的 x 绝对收敛. 令

$$E=\left\{x\,|\,x\in[a,b],f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]\text{收敛}\right\},$$

定义 $f:[a,b]\to C$，且

$$f(x)=\begin{cases}f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)], & x\in E,\\ 0 & x\overline{\in}E,\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立.

再证 $f(x)$ 也是 $|f_n|$ 关于 $\|\cdot\|$ 的极限，则 $L^2[a,b]$ 是完备的，即为希尔伯特空间.

由 $\{f_n\}$ 是柯西列，故 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, N\in\mathbf{N}$，使得当 $m,n>N$ 时，有 $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$，则当 $n>N$ 时，有 $\|f_{n_k}-f_n\|<\varepsilon$.

再用法都引理，得

$$\int_a^b|f-f_n|^2\mathrm{d}x\leqslant\underline{\lim_{k\to+\infty}}\int_a^b|f_{n_k}-f_n|^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon^2,$$

所以，$f-f_n\in L^2[a,b]$. 而 $f=(f-f_n)+f_n$，于是 $f\in L^2[a,b]$，则由上述不等式知，$\|f-f_n\|\leqslant\varepsilon$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$，即 $f(x)$ 也是

$\{f_n\}$关于 $\|\cdot\|$ 的极限，$L^2[a,b]$是希尔伯特空间.

例7 设X是内积空间，$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，$(n\to\infty)$，证明：

(1) $\|x_n\|\to\|x_0\|\quad(n\to\infty)$；

(2) $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\quad(n\to\infty)$；

(3) $\{x_n\}$有界；

(4) $x_n+y_n\to x_0+y_0\quad(n\to\infty)$；

(5) 当$\alpha_n,\alpha\in K$且$\alpha_n\to\alpha$时，$\alpha_n x_n\to\alpha x_0\quad(n\to\infty)$.

证 (1)由内积导出的范数性质知

$$|\|x_n\|-\|x_0\||\leqslant\|x_n-x_0\|.$$

当$n\to\infty$时，$x_n\to x_0$，故

$$|\|x_n\|-\|x_0\||\to 0,$$

所以
$$\|x_n\|\to\|x_0\|\quad(n\to\infty).$$

类似可证
$$\|y_n\|\to\|y_0\|\quad(n\to\infty).$$

(2)
$$\begin{aligned}&|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|\\&\leqslant|(x_n,y_n-y_0)|+|(x_n-x_0,y_0)|\\&\leqslant\|x_n\|\,\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\,\|y_0\|,\end{aligned}$$

因为$\|x_n\|$有界，所以$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$.

(3)由题(1)直接可得$\{x_n\}$有界.

(4)
$$\|(x_n+y_n)-(x_0+y_0)\|\leqslant\|x_n-x_0\|+\|y_n-y_0\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

所以
$$x_n+y_n\to x_0+y_0\quad(n\to\infty).$$

(5) $\|\alpha_n x_n-\alpha x_0\|\leqslant|\alpha_n|(\|x_n-x_0\|)+|\alpha_n-\alpha|\,\|x_0\|$，而$\alpha_n\to\alpha$，因此$|\alpha_n|$有界. 于是

$$\|\alpha_n x_n-\alpha x_0\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

本例表明，范数运算、内积运算、加法运算和数乘运算都保持连续性.

例8 设H是内积空间，$e_1,e_2,\cdots,e_n$是H中元素，且满足

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\1, & i=j,\end{cases}$$

证明：$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关.

证 用反证法证. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性相关，则必有一组不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=\theta,$$

故 $$(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n,e_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

由题设知，(e_i,e_j) 在 $i\neq j$ 时等于零，在 $i=j$ 时等于1，应有

$$\begin{aligned}&(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n,e_i)\\&=\alpha_i(e_1,e_i)+\alpha_i(e_2,e_i)+\cdots+\alpha_i(e_n,e_i)=\alpha_i.\end{aligned}$$

与前式比较，得 $\alpha_i=0$，与所设矛盾，所以 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关.

例 9 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的一列点，且对一切 $y\in H$，有 $(x_n,y)\to(x,y)\ (n\to\infty)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$.

证 必要性 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则

$$|\,\|x_n\|-\|x\|\,|\leqslant\|x_n-x\|\to0.$$

充分性 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$，则

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2&=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2\mathrm{Re}(x_n,x)\\&\to\|x\|^2+\|x\|^2-2\mathrm{Re}(x,x)=0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

即 $$\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

例 10 设 H 是实内积空间，x,y 是 H 中的非零元，证明：$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 的充要条件是存在 $\lambda>0$，使得 $y=\lambda x$.

证 必要性 因为

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|,$$

所以 $$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\|.$$

又 $$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,y)$$

$$\Longrightarrow(x,y)=\|x\|\,\|y\|,$$

即许瓦兹不等式的等号成立. 故当 $\lambda=\|y\|/\|x\|$ 时，有

$$(y-\lambda x,y-\lambda x)=\lambda^2\|x\|^2+\|y\|^2-2\lambda\|x\|\,\|y\|=0,$$

所以 $y=\lambda x$，且 $\lambda=\|y\|/\|x\|>0$.

充分性　若有 $\lambda>0$，使得 $y=\lambda x$，则

$\|x+y\|=\|(1+\lambda)x\|=(1+\lambda)\|x\|=\|x\|+\|y\|$.

例 11　设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是内积空间的两个元素列，$\|x_n\|\leqslant 1$，$\|y_n\|\leqslant 1$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=1$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0.$$

证　因为

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x_n-y_n\|^2&=\|x_n\|^2+\|y_n\|^2-2\mathrm{Re}(x_n,y_n)\\&\leqslant 2-2\mathrm{Re}(x_n,y_n)\to 0,\end{aligned}$$

所以 $\|x_n-y_n\|\to 0$.

例 12　设 $T:X\to X$ 是有界线性算子，X 为复内积空间，证明：若 $\forall\, x\in X$，有 $(Tx,x)=0$，则 $T=0$.

证　因为 $(Tx,x)=0$，$(Ty,y)=0$，所以

$$0=(T(x+y),(x+y))=(Tx,y)+(Ty,x).$$

以 $\mathrm{i}y$ 代替 y 并乘以 i，得

$$0=\mathrm{i}[(Tx,\mathrm{i}y)+(\mathrm{i}Ty,x)]=(Tx,y)-(Ty,x).$$

将上述两等式相加，得 $(Tx,y)=0$. 取 $y=Tx$，则 $\|Tx\|^2=0$，且

$$\forall\, x\in X,\quad Tx=0.$$

但在实内积空间中，上述结论不成立. 例如，在 $\mathbf{R}^2$ 中，取旋转角为 $90°$ 的变换 T，有 $(Tx,x)=0$，但是 $T\neq 0$.

例 13　设 $H_1,H_2,\cdots,H_n,\cdots$ 是一列内积空间，令

$$H=\left\{\{x_n\}\mid x_n\in H_n,\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\},$$

当 $\{x_n\},\{y_n\}\in H$ 时，规定

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\},$$

其中 α,β 是数，$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$. 证明：$H$ 是内积空间；当 H_n 都是希尔伯特空间时，H 也是希尔伯特空间.

证　对 $\{x_n\},\{y_n\}\in H$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\ \|y_n\|$$
$$\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2\Big)^{1/2},$$
所以$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$有意义.

容易验证,H 按规定的线性运算与内积构成内积空间,现在证明H 是完备的.

取H 中的基本点列$\{x^{(i)}\}$,其中
$$x^{(i)}=\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)},\cdots\},$$
于是,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ i_0$,当$i,j\geqslant i_0$ 时,有 $\|x^{(i)}-x^{(j)}\|<\varepsilon$,则
$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2\Longrightarrow\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|<\varepsilon.$$
从而,$\forall\ n\in\mathbf{N},\{x_n^{(i)}\}$也是$H_n$ 中的基本点列.

设$x_n^{(i)}\to x_n^{(0)}\quad(i\to\infty),\ n=1,2,\cdots$,令
$$x=\{x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\cdots\},$$
则由以上证明知,对任何固定的k,当$i,j\geqslant i_0$ 时,有
$$\sum_{n=1}^{k}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2.$$
若$j=\infty$,则当$i\geqslant i_0$ 时,有
$$\sum_{n=1}^{k}\|x_n^{(i)}-x_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2.$$
令$k\to\infty$,则有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2.$$
因此,$x^{(i)}-x\in H$,从而$x=x^{(i)}-(x^{(i)}-x)\in H$,且当$i\geqslant i_0$ 时,有$\|x^{(i)}-x\|<\varepsilon$,所以$H$ 是完备的. 完备的内积空间是希尔伯特空间.

例 14 设H 是内积空间,H^* 是H 的共轭空间,f_y 表示H 上的线性泛函,$f_y(x)=(x,y),x\in H$,若映射$T:H\mapsto H^*,y\mapsto f_y$

是双射，证明：H 是希尔伯特空间.

证 因为 $\|f_y\| = \|y\|$（见例14），所以T 是等距的. 又T 为双射，所以H 与H^*是等距同构的. 由于任何赋范线性空间的共轭空间必是完备的，所以 H 也是完备的.

也可以这样证：任取 H 中的一基本序列$\{y_n\}$，则由

$$|(f_{y_n}-f_{y_m})(x)|=|(x,y_n-y_m)|\leqslant\|y_n-y_m\|\ \|x\|$$

可得
$$\|f_{y_n}-f_{y_m}\|\leqslant\|y_n-y_m\|,$$
故$\{f_{y_n}\}$是H^*中一个基本序列. 由于H^*是完备的，故必有$z\in H^*$，使得 $\|f_{y_n}-z\|\to 0\quad(n\to\infty)$.

由题设知，$T: y\mapsto f_y$ 是H 到H 的双射，必存在$y\in H$，使得$z=f_y$，则有（例 14 结论）

$$\|y_n-y\|=\|f_{y_n}-y\|=\|f_{y_n}-f_y\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

即 $y_n\to y$，所以 H 是完备的，H 是一希尔伯特空间.

例15 设H 为内积空间，$y\in H$，H 上的泛函f_y 定义为$f_y(x)=(x,y)$，$x\in H$，证明：f_y 是 H 上的连续线性泛函，且 $\|f_y\|=\|y\|$.

证 $\forall\ x_1,x_2\in H$ 和任意数α,β；有

$$\begin{aligned}f_y(\alpha x_1+\beta x_2)&=(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha(x_1,y)+\beta(x_2,y)\\&=\alpha f_y(x_1)+\beta f_y(x_2)\end{aligned}$$

成立，故 f_y 是线性泛函.

利用定义与许瓦兹不等式证f_y 连续性，有

$$|f_y(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\|,$$

且 $\|f_y\|\leqslant\|y\|$. 若取$x=y$，则有

$$f_y(y)=(y,y)=\|y\|^2.$$

又 $\quad|f_y(y)|\leqslant\|f_y(y)\|\ \|y\|\Longrightarrow\|y\|^2<\|f_y\|\ \|y\|,$

所以
$$\|y\|\leqslant\|f_y\|.$$

综上两式即得 $\|f_y\|=\|y\|$.

例 16 设H 为希尔伯特空间，A 是从 H 到 H 的线性算子，

$D(A)=H$，且满足

$$(Ax,y)=(x,Ay),\quad x,y\in H,$$

证明：A 一定是 H 上的有界线性算子.

证 设序列 $\{x_n\}\subset H$，且 $x_n\to x_0$，$Ax_0\to y_0$，则 $\forall\ y\in H$，可得 $(Ax_n,y)=(x_n,Ay)$.

对上式两端令 $n\to\infty$，则由内积连续性得 $(y_0,y)=(x_0,Ay)$. 类似地，有

$$(x_0,Ay)=(Ax_0,y)\Longrightarrow(y_0,y)=(Ax_0,y).$$

由 y 的任意性知，$y_0=Ax_0$，从而知 A 为闭算子.

例 17 证明：在实连续函数空间 $C[a,b]$ 上，定义 $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ 为函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的一个内积，$C[a,b]$ 构成一个内积空间.

证 由内积定义知，$\forall\ x,y\in C[a,b]$，有

$$(x,y)=(y,x),\quad (x,x)=\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y,z)&=\int_a^b(\alpha x+\beta y)z(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\alpha x(t)z(t)\mathrm{d}t+\int_a^b\beta y(t)z(t)\mathrm{d}t\\&=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\end{aligned}$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且当 $x(t)\equiv 0,t\in[a,b]$ 时，有

$$\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t=0.$$

反之，当 $\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t=0$ 时，也有

$$x(t)\equiv 0,t\in[a,b].$$

否则，若 $x(t)\not\equiv 0,t\in[a,b]$，则必存在 $t_0\in[a,b]$，使得 $x(t_0)\neq 0$，由 $x(t)$ 的连续性知，存在 $U(t_0,\delta)$，即 $t_0-\delta<t<t_0+\delta$，使得 $x(t)\neq 0$. 于是

$$\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} x^2(t)\mathrm{d}t > 0,$$

从而导出与$\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t=0$矛盾.

所以,(x,y)满足内积的三个条件,又$C([a,b])$是一线性空间,故$C([a,b])$为实内积空间.

例18 设T,S为定义于希尔伯特空间H上的线性算子,且对于一切$x,y\in H$,有$(Tx,y)=(x,Sy)$,证明:T和S为有界的.

证 先证T是闭算子. 因为$D(T)=H$,设$x_n\to x_0$,$Tx_n\to y_0\ (n\to\infty)$,则$\forall\ y\in H$,有

$$(y_0,y)=\lim_{n\to\infty}(Tx_n,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,Sy)=(x_0,Sy)=(Tx_0,y),$$

所以,$y_0=Tx_0$,故T为闭算子. 由闭图像定理知,T是连续算子.

由$(Sy,x)=(y,Tx)$,类似可证S也是有界的.

例19 设H_1,H_2均为希尔伯特空间,定义乘积希尔伯特空间为

$$H_1\times H_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in H_1,x_2\in H_2\},$$

$$(\{x_1,x_2\},\{y_1,y_2\})=(x_1,y_1)_1+(x_2,y_2)_2,$$

其中$(*,*)_1$与$(*,*)_2$分别为H_1,H_2上的内积;算子V:$H_1\times H_2\to H_1\times H_2$定义为$V(\{x_1,x_2\})=(-x_2,x_1)$. 证明:

(1)$H_1\times H_2$是完备的内积空间;

(2)V是$H_1\times H_2\to H_2\times H_1$上的有界线性算子,且$\|V\|=1$;

(3)$V^*(\{x_2,x_1\})=(x_1,-x_2)$,$V^*$定义为满足

$$(V(\{x_1,x_2\}),\{y_2,y_1\})=(\{x_1,x_2\},V^*(\{y_2,y_1\}))$$

的算子;

(4)$V^*V=I_{H_1\times H_2},\quad VV^*=I_{H_2\times H_1},\ \|V^*\|=1$.

证 (1)设$\{\{x_1^{(n)},x_2^{(n)}\}\}$是$H_1\times H_2$上的基本点列,则当$n,m\to\infty$时,有

$$(x_1^{(n)}-x_1^{(m)},x_1^{(n)}-x_1^{(m)})_1+(x_2^{(n)}-x_2^{(m)},x_2^{(n)}-x_2^{(m)})_2\to 0.$$

从而$\{x_1^{(n)}\}\subset H_1$,$\{x_2^{(n)}\}\subset H_2$都是基本点列,所以必有$x_1\in H_1$,

$x_2 \in H_2$,使得

$$x_1^{(n)} \to x_1, \quad x_2^{(n)} \to x_2 \quad (n\to\infty).$$

于是
$$\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\} \to \{x_1, x_2\} \quad (n\to\infty),$$

即知 $H_1 \times H_2$ 是完备的.

(2)由定义知,V 的线性是显然的. 又

$$\begin{aligned}\|V(\{x_1,x_2\})\|^2_{H_2\times H_1} &= \|\{-x_2,x_1\}\|^2 = (\{-x_2,x_1\},\{-x_2,x_1\}) \\ &= (x_2,x_2)+(x_1,x_1) = (\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2\}) \\ &= \|\{x_1,x_2\}\|_{H_1\times H_2},\end{aligned}$$

从而知 V 是有界的,且 $\|V\|=1$.

(3)
$$\begin{aligned}(V\{x_1,x_2\},\{y_2,y_1\}) &= (\{-x_2,x_1\},\{y_2,y_1\}) \\ &= -(x_2,y_2)+(x_1,y_1)(\{x_1,x_2\},V^*\{y_2,y_1\}) \\ &= (\{x_1,x_2\},\{y_1,-y_2\}) = (x_1,y_1)-(x_2,y_2),\end{aligned}$$

所以 $(V\{x_1,x_2\},\{y_2,y_1\}) = (\{x_1,x_2\},V^*\{y_2,y_1\})$.

(4)$\forall\ \{x_1,x_2\} \in H_1\times H_2$,有

$$V^*V(\{x_1,x_2\}) = V^*(\{-x_2,x_1\}) = \{x_1,x_2\}.$$

又$\forall\ \{x_2,x_1\} \in H_2\times H_1$,有

$$VV^*(\{x_2,x_1\}) = V(\{x_1,-x_2\}) = \{x_2,x_1\}.$$

故
$$V^*V = I_{H_1\times H_2}, \quad VV^* = I_{H_2\times H_1},$$

由题(2)中计算知,V 是等距的,从而$\forall\ \{x_2,x_1\} \in H_2\times H_1$,有

$$\|\{x_2,x_1\}\| = \|VV^*(\{x_2,x_1\})\| = \|V^*(\{x_2,x_1\})\|,$$

所以,V^* 也是等距的.

第二节　投 影 定 理

主 要 内 容

1. 定义 1　设 H 为内积空间,(* , *)是其中的内积.

(1)若 H 中两个向量 x,y 满足 $(x,y)=0$,则称 x 与 y **直交**,记做 $x \perp y$.

(2)若M是H的子集，当x与M中一切向量y都直交时，称x与M直交，记做$x\perp M$.

(3)若M与N是H的两个子集，如果$\forall\ x\in N$及$\forall\ y\in N$，都有$x\perp y$，则称M与N直交，记做$M\perp N$.

(4)若M是H的子集，H中所有与M直交的向量全体称为M的**直交补**(集)，记做$M^{\perp}$.

当$x\perp y$时，有$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. 该式称为内积空间中的勾股定理.

2. 定理1 设H是内积空间，M,N是H的两个子集，那么：

(1)$M^{\perp}$是H的闭线性子空间；

(2)若$M\subset N$，则必$N^{\perp}\subset M^{\perp}$；

(3)$M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$或$\varnothing$；

(4)若(hM)是M张成的线性闭子空间，则$M^{\perp}=(h(M))^{\perp}$.

3. 定义2 设H是内积空间，M_1与M_2是H的两个线性子空间. 若$M_1\perp M_2$，则称$M=\{x_1+x_2|x_1\in M_1,x_2\in M_2\}$为$M_1$与$M_2$的**直交和**，记做$M_1\oplus M_2$.

定义3 设M是内积空间H的线性子空间，$x\in H$. 若有$x_0\in M$，$x_1\perp M$，使得$x=x_0+x_1$，则称x_0是x在M上的**直交投影**，简称**投影**.

如果x在M上有投影，则投影是惟一的.

4. 定理2 设M是内积空间H的线性子空间，$x\in H$. 若x_0是x在M上的投影，则

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|, \qquad ①$$

且x_0是M中使式①成立的惟一向量.

定理3(变分引理) 设M是内积空间H中完备的凸集，$x\in H$，记d为x到M的距离，且

$$d=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

则必有惟一的$x_0\in M$，使得$\|x-x_0\|=d$.

定理4 设H是内积空间,M是H的线性子空间,$x\in H$,$x_0\in M$.若$\|x-x_0\|=d(x,M)$,则$(x-x_0)\perp M$.

定理5(投影定理) 设M是内积空间H的完备子空间,则$\forall\ x\in H$,x在M上的投影惟一存在,即存在$x_0\in M$,$x_1\perp M$,使得$x=x_0+x_1$,且这分解是惟一的.

推论1 若M是内积空间H中的完备线性子空间,且$M\neq H$,则$M^{\perp}$中有非零元素.

推论2 设H是希尔伯特空间,M是H的线性子空间,则$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$. 特别地,若$M^{\perp}=\{\theta\}$,则$M$在$H$中稠密.

疑难解析

1. 什么是投影的极值性质?

答 投影的极值性质是指:当M是内积空间H的线性子空间,且$x\in H$,$x_0\in M$时,有

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

其中x_0为x在M上的投影.

这个性质说明,在用线性子空间中的元素y来逼近x时,当且仅当y等于x在M上的投影x_0时,逼近的程度最好(取得极小值).

在随机过程、逼近论、最优化理论等学科中常用投影的极值性质来研究最佳逼近.

2. 投影定理有什么意义?有什么局限?为什么?

答 投影定理是希尔伯特空间理论中的一个极其重要的基本定理.依据投影定理,可以建立希尔伯特空间的闭线性子空间与投影算子的一一对应,使空间之间的关系与投影算子之间的关系完全对应起来,使得可以把线性闭子空间与投影算子同等对待.

但投影定理仅在希尔伯特空间成立,在一般巴拿赫空间不成立,因为在巴拿赫空间中没有直交概念.

3. 怎样求最佳逼近元?

答 变分引理的证明给出了最佳逼近元的构造方法,它就是

极小化序列$\{x_n\}$的极限.

设$\dim M=n, e_1, e_2, \cdots, e_n$是$M$的一个基，则$M$中关于$x$的最佳逼近元$x_0=\sum_{j=1}^{n} e_j\lambda_j$必满足：

$$(x-x_0, y)=0, \ \forall\ x, y\in M,$$

即
$$(x-x_0, e_j)=0, \ i=1,2,\cdots,n,$$

亦即有线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(e_j, e_i)=(x, e_i), \ i=1,2,\cdots,n.$$

由最佳逼近元存在且惟一，方程组的解存在且惟一，故其克拉默行列式

$$G(e_1,e_2,\cdots,e_n)=\begin{vmatrix}(e_1,e_1) & (e_2,e_1) & \cdots & (e_n,e_1)\\ (e_1,e_2) & (e_2,e_2) & \cdots & (e_n,e_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (e_1,e_n) & (e_2,e_n) & \cdots & (e_n,e_n)\end{vmatrix}\neq 0,$$

其解为$\lambda_j=\dfrac{G_j}{G(e_1,e_2,\cdots,e_n)}$. 其中$G_j$表示将$G(e_1,e_2,\cdots,e_n)$中第$j$列换成$((x,e_1),(x,e_2),\cdots,(x,e_n))^{\mathrm{T}}$后所得的行列式.

方法、技巧与典型例题分析

要求理解直交、直交子空间、直交补、直交和及直交投影等概念，熟悉变分引理与投影定理，掌握求有限维空间的最佳逼近元的方法，会利用基本概念与基本定理证明一些较简单的命题.

例1 设M与N是内积空间H的两个子集，证明：

(1)若$M\perp N$，则$M\subset N^{\perp}$；

(2)若$M\subset N$，则$N^{\perp}\subset M^{\perp}$；

(3)$M\subset(M^{\perp})^{\perp}$；

(4)$M\subset H$，则$M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$.

证 (1)因为$N^{\perp}=\{x\mid (x,y)=0, \forall\ y\in N, x\in H\}$，而$M\perp N$，

且$M\subset H$,所以,$\forall\ x\in M\Rightarrow x\in N^{\perp}$,即$M\subset N^{\perp}$.

(2)$\forall\ x\in N^{\perp}$和一切$y\in N$,有$(x,y)=0$. 又由$M\subset N$知,$\forall\ y\in M$,有$(x,y)=0$,所以$x\in M^{\perp}$,即$\forall\ x\in N^{\perp}\Rightarrow x\in M^{\perp}$,故$N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

(3)$\forall\ x\in M$,有$x\perp M^{\perp}$,从而$x\in(M^{\perp})^{\perp}$,即$M\subset(M^{\perp})^{\perp}$.

(4)$\forall\ x\in M\cap M^{\perp}$,有$x\perp x$,即$(x,x)=0\Rightarrow x=\theta$,故$M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$.

例2 在内积空间中,若$x\perp y$,证明:$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$,并可推广到$m$个互相直交向量情形. 若$X$为实空间,则由等式可推断出$x\perp y$.

证 若$x_i\perp x_j$, $i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m$,则直接计算可得

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|^2=\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2.$$

若
$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2,$$

则
$$\begin{aligned}0&=(x+y,x+y)-\|x\|^2-\|y\|^2\\&=(x,y)+(y,x)=(x,y)+\overline{(x,y)}=2\mathrm{Re}(x,y),\end{aligned}$$

从而知,在复空间时,由等式不一定推断出$x\perp y$.

例3 设$x\neq\theta,y\neq\theta$是内积空间X的两个元素,证明:

(1)若$x\perp y$,则$\{x,y\}$是线性无关的;

(2)若$x_j\neq\theta,x_j\perp x_i(i\neq j),i,j=1,2,\cdots,m$,则集$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是线性无关的.

证 (1)用反证法证. 设$y=\alpha x$,则

$$0=(x,y)=\bar{\alpha}\|x\|^2\Rightarrow\alpha=0\text{ 或 }x=\theta,$$

导出与题设矛盾,故集$\{x,y\}$线性无关.

(2)设$\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jx_j=0$,则

$$0=(0,x_k)=\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_jx_j,x_k\right)=\alpha_k\|x_k\|^2,$$

从而,$\alpha_k=0,k=1,2,\cdots,m$,故集$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$线性无关.

例4 在内积空间中，证明：

(1)$x\perp y\Longleftrightarrow$对于所有数$\alpha$，有$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$；

(2)$x\perp y\Longleftrightarrow$对于所有数$\alpha$，有$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$.

证 (1)因为

$$(x\pm\alpha y,x\pm\alpha y)=\|x\|^2\pm\bar{\alpha}(x,y)\pm\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2,$$

所以当$x\perp y$时，有

$$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|.$$

而 $$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|\Longrightarrow\bar{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)=0,$$

当空间为实的时，取$\alpha=1$，当空间为复的时，取$\alpha=1$ 或$\alpha=-\mathrm{i}$，从而得到$(x,y)=0\Longrightarrow x\perp y$.

(2)若$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$，且$y\neq\theta$，则可取$\alpha=-\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$，可得

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x+\alpha y,x+\alpha y)-\|x\|^2\\&=\bar{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2=-|(x,y)|^2\|y\|^{-2}\leqslant0,\end{aligned}$$

故必$x\perp y$. 反之，是显然的.

例5 设M是内积空间X的子空间，$x\in X$，记$d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$，证明：$\forall\ y_1,y_2\in M$，有

$$\|y_1-y_2\|\leqslant\sqrt{\|x-y_1\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-y_2\|^2-d^2}.$$

证 记$z_1=x-y_1,z_2=x-y_2$，则对任何$\lambda\neq1$，有

$$(y_1-\lambda y_2)/(1-\lambda)\in M,$$

所以 $$\left\|x-\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}\right\|^2\geqslant d^2,$$

即 $$\|z_1-\lambda z_2\|^2\geqslant d^2|1-\lambda|^2.$$

对于$\lambda=1$的情形，将内积展开，得

$$\begin{aligned}&[(z_1,z_1)-d^2]-\bar{\lambda}[(z_1,z_2)-d^2]-\lambda[(z_2,z_1)-d^2]\\&+|\lambda|^2[(z_2,z_2)-d^2]\geqslant0.\end{aligned}$$

若取 $$\lambda=[(z_1,z_2)-d^2]/[(z_2,z_2)-d^2],$$

则有 $$[(z_1,z_1)-d^2]-|(z_1,z_2)-d^2|^2/[(z_2,z_2)-d^2]\geqslant0,$$

即 $$|(z_1,z_2)-d^2|^2\leqslant[(z_1,z_1)-d^2][(z_2,z_2)-d^2],$$

故 $\|y_1-y_2\|^2=\|z_1-z_2\|^2=(z_1-z_2,z_1-z_2)$

$$
\begin{aligned}
&=(z_1,z_1)-(z_2,z_1)-(z_1,z_2)+(z_2,z_2)\\
&=(\|z_1\|^2-d^2)+(\|z_2\|^2-d^2)\\
&\quad-[(z_2,z_1)-d^2]-[(z_1,z_2)-d^2]\\
&\leqslant(\|z_1\|^2-d^2)+(\|z_2\|^2-d^2)\\
&\quad+2\sqrt{\|z_1\|^2-d^2}\sqrt{\|z_2\|^2-d^2}\\
&=\left(\sqrt{\|z_1\|^2-d^2}+\sqrt{\|z_2\|^2-d^2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

例6 设 M 是内积空间 H 的非空子集，证明：$M^\perp=((M^\perp)^\perp)^\perp$，$M^\perp=(\overline{M})^\perp$.

证 因为$M\subset(M^\perp)^\perp$，所以$M^\perp\supset((M^\perp)^\perp)^\perp$. 反之也有$M^\perp\subset((M^\perp)^\perp)^\perp$. 因此$M^\perp=((M^\perp)^\perp)^\perp$.

又由$M\subset\overline{M}$，所以$M^\perp\supset(\overline{M})^\perp$. 反之，对$x\in M^\perp$，$y\in\overline{M}$，取$\{y_n\}\subset M$，使得$y_n\to y\quad(n\to\infty)$. 因此

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x,y_n)=0,$$

从而

$$x\in(\overline{M})^\perp\Rightarrow M^\perp\subset(\overline{M})^\perp.$$

综上即得$M^\perp=(\overline{M})^\perp$.

例7 设M为希尔伯特空间H的线性子空间，若对任何$x\in H$在M上的投影x_0都存在，证明：M必为H的闭子空间.

证 取$\{x_n\}\subset M$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 因为$x$在$M$上的投影存在，故存在$x_0\in M$，$x_1\perp M$，使得$x=x_0+x_1$. 需证明$x_1=0$.

因为$x_n\in M$，所以$(x_n,x_1)=0$，从而

$$0=\lim_{n\to\infty}(x_n,x_1)=(x,x_1)=(x_0+x_1,x_1)=(x_1,x_1),$$

故$x_1=0$，即$x=x_0\in M$，即M是闭子空间.

例8 设M是希尔伯特空间H的闭子空间，$x\in H$，证明：

$$\min\{\|x-z\|\mid z\in M\}=\max\{|(x,y)|\mid y\in M^\perp,\|y\|=1\}.$$

证 因为M是闭子空间，x在M上的投影存在，故有$x_0\in M$，$x_1\perp M$，使得$x=x_0+x_1$，则由定理2知

$$\min\{\|x-z\| \mid z\in M\}=\|x_1\|.$$

另一方面，$\forall\ y\in M^{\perp},\ \|y\|=1$，有

$$|(x,y)|=|(x_0+x_1,y)|=|(x_1,y)|\leqslant\|x_1\|\ \|y\|=\|x_1\|,$$

即 $$\max\{|(x,y)| \mid y\in M^{\perp},\ \|y\|=1\}\leqslant\|x_1\|.$$

若取 $x_1=\theta$，则

$$\max\{|(x,y)| \mid y\in M^{\perp},\ \|y\|=1\}=0=\|x_1\|.$$

若 $x_1\neq\theta$，并取 $y=x_1/\|x_1\|$，则 $\|y\|=1, y\in M^{\perp}$，且

$$(x,y)=(x_0+x_1,x_1/\|x_1\|)=\|x_1\|.$$

故 $$\max\{|(x,y)| \mid y\in M^{\perp},\ \|y\|=1\}\geqslant\|x_1\|.$$

于是 $$\max\{|(x,y)| \mid y\in M^{\perp},\ \|y\|=1\}=\|x_1\|=\min\{\|x-z\| \mid z\in M\}.$$

例9 证明：$\mathbf{C}^n$ 的子集 $M=\left\{y \mid y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),\ \sum_{j=1}^{n}\eta_j=1\right\}$ 是完备的、凸的，并在 M 中找出最小范数的向量.

证 $\forall\ w=(w_i)\in\overline{M}$，$\exists\ \{y_m\}\subset M$，使得

$$y_m=(\eta_1^{(m)},\eta_2^{(m)},\cdots,\eta_n^{(m)})\to w,$$

且 $$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^{(m)}=1\Longrightarrow\sum_{j=1}^{n}w_j=1.$$

从而知 $w\in M$. 即 M 是闭的，所以 M 是完备的.

又 $\forall y\in M, z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)\in M$ 与 $\alpha\in[0,1]\Longrightarrow\alpha y+(1-\alpha)z\in M$. 因为

$$\sum_{j=1}^{n}[\alpha\eta_j+(1-\alpha)\zeta_j]=\alpha\sum_{j=1}^{n}\eta_j+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}\zeta_j=1,$$

所以 M 是凸的，$y=(1/n,1/n,\cdots,1/n)$ 在 M 中有最小范数.

例10 设 M 是希尔伯特空间 H 的非空子集，证明：$(M^{\perp})^{\perp}$ 是 H 中包含 M 的最小闭子空间.

证 由例6可知

$$\overline{\mathrm{span}M}=(\overline{\mathrm{span}M}^{\perp})^{\perp}=((\mathrm{span}M)^{\perp})^{\perp},$$

要证 $$\overline{\mathrm{span}M}=(M^{\perp})^{\perp},$$

需要证明 $(\text{span}M^{\perp})=M^{\perp}$.

因为 $M\subset\text{span}M$,所以 $M^{\perp}\supset(\text{span}M)^{\perp}$. 反之,设 $x\in M^{\perp}$,则 $\forall\ y\in M$,有 $(x,y)=0$. 已知内积关于第二变元是共轭线性的,所以 $(x,y)=0$ 关于一切 $y\in\text{span}M$ 都成立,从而知 $x\in(\text{span}M)^{\perp}$,即 $(\text{span}M)^{\perp}=M^{\perp}$.

例11 设 M 和 N 是希尔伯特空间的两个直交的闭子空间,证明:$M\oplus N$ 也是 H 的闭子空间.

证 任取 $\{x_n\}\subset M$, $\{y_n\}\subset N$, $x_n+y_n\in H$ $(n\to\infty)$,则 $\{x_n+y_n\}$ 是 H 中的一基本点列. 因而当 $m,n\to\infty$ 时, $\|(x_m+y_m)-(x_n+y_n)\|\to 0$. 由题设知, $M\perp N$,故

$$\|(x_m-x_n)+(y_m-y_n)\|^2=\|x_m-x_n\|^2+\|y_m-y_n\|^2.$$

从而 $\|x_m-x_n\|\to 0,\quad \|y_m-y_n\|\to 0\quad (m,n\to\infty)$.

又 M,N 是 H 的完备子空间,所以必存在 $x\in M$, $y\in N$,使得 $x_n\to x$, $y_n\to y$ $(n\to\infty)$,则有 $x_n+y_n\to x+y$ $(n\to\infty)$,故 $M\oplus N$ 也是 H 的闭子空间.

例12 证明:$(-1,1)$内所有实值连续函数所成的向量空间 X 可以表示成$(-1,1)$内奇连续函数全体与偶连续函数全体所成集的直和.

证 $\forall\ x(t)\in X$,令

$$x_1(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)],\quad x_2(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)],$$

则 $x_1(t)$ 是奇函数, $x_2(t)$ 是偶函数,且 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 成立,故命题成立,且该分解式惟一.

例13 设 $C[-1,1]$ 是实值连续函数空间,定义内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 若记 M 为 $C[-1,1]$ 中奇函数的全体, N 为 $C[-1,1]$ 中偶函数的全体,证明:$C[-1,1]=M\oplus N$.

证 本例与例12几乎一样,只是例12没有定义内积,因此本例需证明 $M\perp N$.

$\forall\ f\in M, g\in N$，有

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(-f(-x))g(-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=-(f,g),$$

从而知$(f,g)=0$，即$M\perp N$.

又对$f\in C[-1,1]$，令

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则$f_1\in N, f_2\in M$，而$f=f_1+f_2$，所以$C[-1,1]=M\oplus N$.

例 14 设M_1, M_2是希尔伯特空间X的子空间，$M_1\perp M_2$，$M=M_1\oplus M_2$，证明：M是X的闭子空间的充要条件是M_1, M_2均为闭子空间.

证 必要性 设M为闭子空间，$\{x_n\}\in M_1$，且当$n\to\infty$时，$x_n\to x$，则$\forall\ x\in M$和一切$y\in M_2$，有

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=0,$$

故$x\in M_2^{\perp}$. 因为

$$M=M_1\oplus M_2,\ x\in M,\ x\in M_2^{\perp},$$

所以$x\in M_1$，即M_1为闭子空间.

类似可证M_2为闭子空间.

充分性 设M_1, M_2均为闭子空间，$\{x^{(n)}\}\subset M$，$x^{(n)}\to x$ $(n\to\infty)$，$x\in X$，令$x^{(n)}=x_1^{(n)}+x_2^{(n)}$，其中$x_1^{(n)}\in M_1, x_2^{(n)}\in M_2$，则$x=x_1+x_2$，其中$x_1\in M_1, x_2\in M_1^{\perp}$. 又因为

$$\| x_i^{(n)}-x_i \| \leqslant \| x^{(n)}-x \|,\ i=1,2,$$

故
$$x_1^{(n)}\to x_1\in M_1,\quad x_2^{(n)}\to x_2\in M_2.$$

从而$x\in M_1+M_2$，即M为闭子空间.

例15 设M为希尔伯特空间X的凸子集，$\{x_n\}\subset M$，且$\| x_n \|\to d=\inf\limits_{x\in M}\| x \|$ $(n\to\infty)$，证明：$\{x_n\}$是X中的收敛点列.

证 由平行四边形公式

$$2\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2=\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2,$$

因为M是凸集，所以$(x_n+x_m)/2\in M$，则当$n,m\to\infty$时，有

$$0\leqslant\frac{1}{2}\|x_n-x_m\|^2\leqslant\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2d^2\to 0,$$

即$\|x_n-x_m\|\to 0$. 又因为X是希尔伯特空间，所以X是完备空间，故$\{x_n\}$是X中的收敛点列.

例16 设X是内积空间，$M\neq\varnothing$为X的完备凸子集，证明：对于每个给定的$x\in X$，存在惟一的$y\in M$，使得

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\|=\|x-y\|.$$

证 存在性 由下确界的定义知，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\exists\ y_n\in M$，使得

$$\delta\leqslant\|x-y_n\|\leqslant\delta+1/n,$$

故

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|.$$

由平行四边形等式和M是凸集，得

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2\\&=2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)-\|2x-(y_n+y_m)\|^2\\&=2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)\\&\quad-4\left\|x-\frac{1}{2}(y_n+y_m)\right\|^2\\&\leqslant 2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)-4\delta^2\to 0\quad(n,m\to\infty),\end{aligned}$$

即$\{y_n\}$是柯西序列. 因为M是完备的，故存在$y\in M$，使得$y_n\to y$. 由范数的连续性即得

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\|x-y\|.$$

惟一性 若另有$y_0\in M$，使得$\delta=\|x-y_0\|$，则由平行四边形等式

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2&=\|(x-y_0)-(x-y)\|^2\\&=2(\|x-y_0\|^2+\|x-y\|^2-\|2x-(y_0+y)\|^2)\\&=2(\delta^2+\delta^2)-4\left\|x-\frac{1}{2}(y_0+y)\right\|^2\leqslant 4\delta^2-4\delta^2=0,\end{aligned}$$

从而，$y=y_0$，即y惟一.

例17 若M为希尔伯特空间H的子空间,证明:M是H上某连续线性泛函的零空间的充要条件是$M^{\perp}$为一维子空间.

证 必要性 设f是满足条件的泛函,若f对应于$y_0\in H$,即$f(x)=(x,y_0)$,则由

$$M=N(f)=\text{span}\{y_0\}^{\perp},$$

可得
$$M^{\perp}=\text{span}\{y_0\}^{\perp\perp}=\text{span}\{y_0\}.$$

这是因为有限维空间必是闭子空间.

充分性 设$M^{\perp}$为一维子空间,取$x_0\in M^{\perp}$,且$x_0\neq 0$,则$H=M\oplus\text{span}\{x_0\}$.因为,$\forall\ x\in H$,有惟一的分解$x=m+tx_0$,其中$m\in M$,$t$为一个数.作$H$上的泛函:$f(m+tx_0)=t\|x_0\|$,易见$f$是$H$上的线性泛函,$f$的零空间$N(f)=M$.又由$N(f)$的闭性可知,$f$是连续的,且$\|f\|=1$.

例18 设H为内积空间,$M,N\subset H$,L是由M和N张成的线性空间,证明:$L^{\perp}=(M^{\perp}\cap N^{\perp})$.

证 由$M\subset L$和$N\subset L$,即可得出$L^{\perp}\subset(M^{\perp}\cap N^{\perp})$,故只需证$(M^{\perp}\cap N^{\perp})\subset L^{\perp}$即可.

设$x\in(M^{\perp}\cap N^{\perp})$,$y\in L$,则必有$y=\alpha y_1+\beta y_2$,其中$y_1\in M$,$y_2\in N$,从而

$$(x,y)=(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\bar{\alpha}(x,y_1)+\bar{\beta}(x,y_2)=0.$$

所以,$x\perp y$,从而知$x\in L^{\perp}$,即$(M^{\perp}\cap N^{\perp})\subset L^{\perp}$.

综合两式即得 $L^{\perp}=(M^{\perp}\cap N^{\perp})$.

第三节 内积空间中的直交系

主要内容

1. 定义1 设$\mathscr{F}$是内积空间H中的一族非零向量,若$\mathscr{F}$中任何两个不同向量都直交,则称$\mathscr{F}$是H中的一个**直交系**.若直交系$\mathscr{F}$中每个向量的范数都是1,则称$\mathscr{F}$是**就范直交系**.

定义 2 设$\mathscr{F}$是内积空间H中的就范直交系，$x\in H$，则数集$\{(x,e)\mid e\in\mathscr{F}\}$称为向量$x$关于就范直交系$\mathscr{F}$的**傅里叶(Fourier)系数集**，称数$(x,e)$为$x$关于$e$的**傅里叶系数**.

2. **定理 1** 设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是内积空间H中的就范直交系，$M=\text{span}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$x\in H$，则：

(1)$x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$是$x$在$M$上的投影，且

$$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2; \qquad ①$$

(2)对任何数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|. \qquad ②$$

定理 2 （贝塞耳(Bessel)不等式） 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，则$\forall\ x\in H$，$x$的傅里叶系数集$\{(x,e_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$中最多只有可列个不为零，且适合贝塞耳不等式

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2. \qquad ③$$

推论 设$\{e_n\}$是内积空间H中的就范直交系，则$\forall\ x\in H$，必有$\lim\limits_{n\to\infty}(x,e_n)=0$.

3. **定义 3** 设$\{e_n\}$是内积空间H中的就范直交系，若$\forall\ x\in H$，有**巴塞瓦(Parseval)等式**

$$\|x\|^2=\sum_{n}|(x,e_n)|^2 \qquad ④$$

成立，则称直交系$\{e_n\}$在H中是**完备的**.

式④称为x关于$\mathscr{F}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$的完备公式.

定义 4 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，对$x\in H$，称级数$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$为向量$x$关于$\mathscr{F}$的**傅里叶级数**(或**傅里叶展开式**). 当$x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$时，称$x$可以关于$\mathscr{F}$展开成为傅里叶级数.

定理3 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，$E$为由$\mathscr{F}$张成的线性闭子空间，则$\forall\ x\in H$，下述命题等价：

(1)$x\in E$；

(2)$\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2$；

(3)$x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$.

推论1 内积空间H中就范直交系$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$成为完备系的充要条件是$\mathscr{F}$张成的子空间$E=H$，另一充要条件是$\forall\ x\in H$，有$x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$成立.

推论2 （斯切克洛夫(Стеклов)定理） 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，若有$H$中的稠密子集$D$，使得$\forall\ x\in D$都成立巴塞瓦等式$\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2$，则$\mathscr{F}$是完备的.

4. **定理4** 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，$\mathscr{F}$张成的线性子空间为$E$. 任取$x_0\in E$，如果$x$在$E$中有投影$x_0$，则$x_0$就是$x$关于$\mathscr{F}$的傅里叶级数$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$. 如果$H$是希尔伯特空间，则$\forall\ x\in H$，$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$是$x$在$E$上的投影.

定理5 （黎斯-费舍尔(Riesz-Fischer)定理） 设H是希尔伯特空间，$\mathscr{F}=\{e_1,e_2,\cdots\}$（有限个或可列个），$\mathscr{F}$张成的线性子空间为$E$. $c_1,c_2,\cdots$是使$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c_j|^2<\infty$的数，则必有惟一的向量$x\in E$以$c_j$为$x$关于$e_j$的傅里叶系数，且$x$有傅里叶系数$x=\sum\limits_{j}c_je_j$.

5. **定义5** 设$\mathscr{F}$是内积空间H中的就范直交系，若$\mathscr{F}^\perp=\{0\}$. 则称$\mathscr{F}$是完全的.

定理6 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，若$\mathscr{F}$是完备的，则$\mathscr{F}$是完全的. 若$H$是希尔伯特空间，则完全的就范直交系必定是完备的.

6. **定理7**（格兰姆-许密特(Gram-Schmidt)定理） 设$G=$

$\{g_1,g_2,\cdots\}$是内积空间H中有限个或可列个线性独立的向量，则必有在H中的就范直交系$\mathscr{F}=\{h_1,h_2,\cdots\}$，使得$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$g_n$是$h_1,h_2,\cdots,h_n$的线性组合，$h_n$也是$g_1,g_2,\cdots,g_n$的线性组合. 这种$h_n$除去一个绝对值为1的常数因子外，由$g_1,g_2,\cdots,g_n$完全确定.

7. 定义6 设H_1与H_2是两个内积空间，若有H_1到H_2上的一一映射φ保持线性运算及内积，即$\forall\ x_1,y_1\in H_1$及两个数α,β，有

$$\varphi(\alpha x_1+\beta y_1)=\alpha\varphi(x_1)+\beta\varphi(y_1),$$

$$(\varphi(x_1),\varphi(y_1))=(x_1,y_1)$$

都成立，则称内积空间H_1和H_2是**同构的**.

定理8 任何n维内积空间H必和n维欧几里德空间E^n同构.

定理9 任何可分的希尔伯特空间必和某个E^n或l^2同构.

疑 难 解 析

1. 为什么在内积空间中要引入就范直交系？

答 因为直交系必是线性无关的子集，因此，在内积空间中引入就范直交系就可以把空间中的向量关于就范直交系展开成级数的形式.

就范直交系相当于欧几里德空间中某些彼此直交的单位向量，而向量x的傅里叶系数相当于x在这些单位方向向量上的坐标.

例如，若一列函数$\{e_n(t)\}$，$n=1,2,\cdots$都属于复空间$L^2[a,b]$，且

$$\int_a^b e_n(t)\overline{e_m(t)}\mathrm{d}t=\delta_{nm}\quad(n,m=1,2,\cdots),$$

其中δ_{nm}是克罗内克尔(Kronecker)记号(即当$n\neq m$时，$\delta_{nm}=0$，$\delta_{nn}=1$)，则$\{e_n\}$是$L^2[a,b]$中的就范直交系，这时$x\in L^2[a,b]$ ($x=x(t)$)关于e_n的傅里叶系数是

$$a_n=(x,e_n)=\int_a^b x(t)\overline{e_n(t)}\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots.$$

特别地，$\{e^{i2n\pi t}\}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$是复希尔伯特空间$L^2[a,b]$的就范直交系，$\forall\ f\in L^2[a,b]$，其傅里叶系数为

$$c_n=\int_0^1 f(t)e^{-i2n\pi t}dt,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

2. 怎样求内积空间H的就范直交系？

答 设$\{x_1,x_2,\cdots\}$是内积空间H中有限个或可列个线性无关的向量，则必有H中的就范直交系$\{e_1,e_2,\cdots\}$，使得$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

令$e_1=x_1/\|x_1\|$，则$\|e_1\|=1$，且

$$\operatorname{span}\{e_1\}=\operatorname{span}\{x_1\}.$$

令$v_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$，因为x_1,x_2线性无关，所以$v_2\neq\theta$，且$v_2\perp e_1$. 再令$e_2=v_2/\|v_2\|$，则$\|e_2\|=1$，且$e_2\perp e_1$. 显然

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2\}.$$

如此继续. 如果已作出$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$，其中$\|e_i\|=1, i=1,2,\cdots,n-1$，且两两正交，满足

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

则令$v_n=x_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_n,e_i)e_i$. 由于$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关，知$v_n\neq\theta$，故可令$e_n=v_n/\|v_n\|$，则$\|e_n\|=1$，且$e_n\perp e_i, i=1,2,\cdots,n-1$，同时满足

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

一直继续下去，即可得到就范直交系. 这个过程称为格兰姆-许密特正交化过程.

方法、技巧与典型例题分析

内积空间的就范直交系是数学分析中直交函数系概念的推广. 在讨论就范直交系时，要注意与前面概念（内积、范数）等之间的联系；在验证其完备性等性质时，要善于运用以前的知识与性质来分析与证明命题.

例 1 设 $F=\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，$x\in H$，则下列命题等价：

(1)$x\in\overline{\text{span}}\{F\}$；　　(2)$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$；

(3)$\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$(巴塞瓦等式).

证 (1)$\Rightarrow$(2). 设 $u_n\in\text{span}\{F\}$，$u_n=\sum\limits_{i=1}^{k_n}\alpha_i e_i$，$\|u_n-x\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 取 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{k_n}(x,e_i)e_i$，则由 $(x_n,e_i)=(x,e_i)$ 知

$$e_i\perp(x_n-x),\quad i=1,2,\cdots,k_n,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-(x,e_i))e_i\perp(x_n-x),$$

即

$$(u_n-x_n)\perp(x_n-x).$$

故

$$\begin{aligned}\|u_n-x\|^2&=\|u_n-x_n+x_n-x\|^2\\&=\|u_n-x_n\|^2+\|x_n-x\|^2\geqslant\|x_n-x\|^2,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=\lim_{n\to\infty}\|u_n-x\|=0,$$

于是

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n.$$

(2)$\Rightarrow$(3). 由(2)知

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\quad\text{或}\quad\|x_n-x\|\to 0.$$

由内积关于变元的连续性知

$$\begin{aligned}\|x\|^2=(x,x)=\lim_{n\to\infty}(x_n,x_n)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2.\end{aligned}$$

(3)$\Rightarrow$(1). 若令 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$，则由(3)得

$$\|x_n-x\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 \to 0 \quad (n\to\infty),$$

所以 $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 但是 $x_n \in \operatorname{span}\{F\}$,故 $x\in\overline{\operatorname{span}}\{F\}$.

例2 设$\{e_n\}$是内积空间X中的就范直交系,$x,y\in X$,证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)(y,e_n)| \leqslant \|x\| \ \|y\|.$$

证 利用赫尔德不等式(无限情形)、柯西-许瓦兹不等式(有限情形)

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2\Big)^{1/2}$$

和巴塞瓦不等式,即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)(y,e_n)| \leqslant \Big[\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} |(y,e_n)|^2\Big]^{1/2}.$$

$$\leqslant \|x\| \ \|y\|.$$

例3 设$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是希尔伯特空间$H$的就范直交系,证明:$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是完备就范直交系的充要条件是,$\forall\ x,y\in X$,有

$$(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda} (x,e_\lambda)(e_\lambda,y).$$

证 必要性 设$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是完备直交系,则$\forall\ x,y\in X$,有

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda} |(x,e_\lambda)|^2<\infty, \quad \|y\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda} |(y,e_\lambda)|^2<\infty.$$

由赫尔德不等式知,所证等式右端收敛. 又

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda, \quad y=\sum_{\lambda\in\Lambda}(y,e_\lambda)e_\lambda,$$

$$(x,y)=\sum_{\lambda,\lambda'\in\Lambda}((x,e_\lambda)e_\lambda,(y,e_{\lambda'})e_{\lambda'})=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)(e_\lambda,y).$$

充分性 设$\forall\ x,y\in X$,有

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda} |(x,e_\lambda)|^2,$$

即,对于一切$x\in H$,巴塞瓦等式成立,从而$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是完备直交系.

例4 设$\{e_n(x)\}$是$L^2[a,b]$中的就范直交系,证明:$\{e_n(x)e_n(y)\}$是$L^2([a,b]\times[a,b])$中的就范直交系,且若$\{e_n(x)\}$

是完备就范直交系时，$\{e_n(x)e_n(y)\}$也是完备就范直交系.

证 $(e_n(x)e_m(y),e_k(x)e_l(y))$

$$=\iint e_n(x)e_m(y)\overline{e_k(x)}\ \overline{e_l(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int e_n(x)\overline{e_k(x)}\mathrm{d}x\int e_m(y)\overline{e_l(y)}\mathrm{d}y=\delta_{nk}\delta_{ml},$$

即$\{e_n(x)e_m(y)\}$为$L^2([a,b]\times[a,b])$的就范直交系.

因为$\forall\ f\in L^2([a,b]\times[a,b])$，有

$$\|f\|^2=\iint|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\text{由富比尼定理})$$

$$=\int_a^b\left(\int_a^b|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\ (\text{由巴塞瓦等式})$$

$$=\int_a^b\left(\sum_n\left|\int_a^b f(x,y)\overline{e_n(x)}\mathrm{d}x\right|^2\right)\mathrm{d}y\ (\text{由勒维定理})$$

$$=\sum_n\int_a^b\left|\int_a^b f(x,y)\overline{e_n(x)}\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}y\ (\text{由巴塞瓦等式})$$

$$=\sum_n\sum_m\left|\int_a^b\overline{e_m(y)}\int_a^b f(x,y)\overline{e_n(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^2(\text{由富比尼定理})$$

$$=\sum_{n,m}\left|\iint f(x,y)\overline{e_n(x)}\ \overline{e_m(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^2,$$

从而$\{e_n(x)e_m(y)\}$是完备的就范直交系.

本例利用了大量的实变函数的概念与定理才得出证明，因此，要求读者在学习泛函分析时，不忘重温实变函数的知识.

例5 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是希尔伯特空间$H$中的完备就范直交系，又设$\{f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots\}$是$H$中的一个就范直交系，满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|e_i-f_i\|^2<1$. 证明：$\{f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots\}$也是$H$的完备就范直交系.

证 用反证法证. 设$\{f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots\}$不是$H$的完备就范直交系，则必存在非零向量$f_0$，使得$f_0\perp f_i,i=1,2,\cdots$.

又由$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是$H$的完备就范直交系，得$\|f_0\|^2=$

$\sum_{i=1}^{\infty}|(f_0,e_i)|^2$. 于是

$$\|f_0\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(f_0,e_i)|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(f_0,e_i)-(f_0,f_i)|^2$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}|(f_0,e_i-f_i)|^2\leqslant\|f_0\|^2\sum_{i=1}^{\infty}\|e_i-f_i\|^2\leqslant\|f_0\|^2,$$

导出矛盾,故$\{f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots\}$必为$H$中的完备就范直交系.

要验证就范直交系的完备性,需要对直交系的元验证巴塞瓦等式. 但这不是容易办到的,所以,较有效的方法是找出一稠密子集,使得对于子集中的元,巴塞瓦等式成立.

例6 在$L^2[0,2\pi]$中,有

$$1/\sqrt{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

是就范直交系,证明:就范直交系是完备的.

证 记F为$L^2[0,2\pi]$中三角多项式全体,$\forall\ T\in F$,有

$$T(t)=\frac{a_0}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中$N\in\mathbf{N}$. 由定理3知,对于T,巴塞瓦等式成立. 又由三角多项式全体在$L^2[0,2\pi]$上的稠密性知,所给就范直交系是完备的.

例7 设$F=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$X$的就范直交系,证明:$\forall\ x\in X$,$x$关于$F$的傅里叶系数$\{(x,e_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$中至多只有可列多个不为零.

证 依照贝塞耳不等式,$\forall\ x\in X$,若任取n个F中的元素e_i排成一列,设为$e_1,e_2,\cdots,e_n$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

于是,在F中使得$|(x,e_i)|\geqslant\|x\|/\sqrt{n}$的$e_i$只有有限个,若记$F_n=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$,且$|(x,e_i)|\geqslant\|x\|/\sqrt{n}$及$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$,则$F$显然为可列集,且当$e_\lambda\in(F-F_n)$时,$(x,e_\lambda)=0$,即$x$的所有傅里叶系数中,非零项至多为可列个.

例8 设H为可分希尔伯特空间,证明:H中任何就范直交系至多是可列集.

证 由题设知H可分,故必可取到H的可列子集$\{x_n\}$,$\{x_n\}$在H中稠密.

设$\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是$H$中的一个就范直交系,要证$\Lambda$至多是可列集. 考察以一切$e_\lambda$为球心,以$1/\sqrt{2}$为半径的球族,则若$\Lambda$不是可列的,球族也是不可列的. 于是,至少有某两个球含有同一个x_k,即有$x_k\in\{x_n\}$,$\lambda,\lambda'\in\Lambda$. 使得

$$\|x_k-e_\lambda\|<1/\sqrt{2},\quad \|x_k-e_{\lambda'}\|<1/\sqrt{2}$$

于是$\|e_\lambda-e_{\lambda'}\|\leqslant\|e_\lambda-x_k\|+\|x_k-e_{\lambda'}\|<2\times1/\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

又由勾股定理知

$$\|e_\lambda-e_{\lambda'}\|^2=\|e_\lambda\|^2+\|e_\lambda'\|^2=1+1=2.$$

即$\|e_\lambda-e_\lambda'\|=\sqrt{2}$,导出矛盾. 故$\Lambda$至多是可列集.

例9 设$F=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt};n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$,证明:

(1)F是$L^2[-\pi,\pi]$中的完备就范直交系;

(2)$\forall\ x\in L^2[-\pi,\pi]$,有$x=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$,且当$[a,b]\subset[-\pi,\pi]$时,可逐项积分,即有

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\int_a^b\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

证 (1)因为$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=1$,且当$m\neq n$时,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+n)t}\mathrm{d}t=0,$$

所以F为就范直交系. 由维尔斯特拉斯三角函数逼近定理知,$\mathrm{span}F$在$L^2[-\pi,\pi]$中稠密,故F是完备就范直交系.

(2) 由 F 的完备性,故$\forall\ x\in L^2[-\pi,\pi]$,记 $C_n=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)e^{-int}dt$，有 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{int}$，级数按 $L^2[-\pi,\pi]$ 的范数意义收敛.

因为 $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$，$M,N\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b x(t)dt-\sum_{n=-N}^{M}C_n\int_a^b e^{int}dt\right|\\ &\leqslant\int_a^b\left|x(t)-\sum_{n=-N}^{M}C_n e^{int}\right|dt\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-\sum_{n=-N}^{M}C_n e^{int}\right|dt\\ &\leqslant 2\pi\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-\sum_{n=-N}^{M}C_n e^{int}\right|^2dt\right)^{1/2}\\ &=2\pi\left\|x-\sum_{n=-N}^{M}C_n e^{int}\right\|\to 0\quad(M,N\to\infty),\end{aligned}$$

因此
$$\int_a^b x(t)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\int_a^b e^{int}dt.$$

例 10 设 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是希尔伯特空间 X 中的就范直交系，若 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\in X$，$y=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i e_i\in Y$，证明：$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\overline{\beta_i}$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\overline{\beta_i}$ 绝对收敛.

证 由题设知

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2=\|x\|^2<\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i|^2=\|y\|^2<\infty.$$

若记
$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\quad y_n=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i,\ n=1,2,\cdots,$$

则
$$(x_n,y_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta_i}(e_i,e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta_i},$$

由内积的连续性得

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\overline{\beta_i}.$$

再由赫尔德不等式，得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i\overline{\beta_i}|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i|^2\right)^{1/2}$$

$$=\|x\|\ \|y\|<\infty,$$

即$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\overline{\beta_i}$绝对收敛.

例 11 设 H 为希尔伯特空间,证明下列命题成立:

(1)H 可分,当且仅当 H 有可数直交基;

(2)若 H 的直交系有可数无穷多个元,H 与 l^2 等距同构;

(3)若 H 的直交系仅有有限多个元,H 与 Φ^n 等距同构.

证 (1)若 H 可分,取 $x_1,x_2,\cdots$ 为 H 中的可数稠密集,从 x_1 开始,删去与前面线性相关的元素,则余下元素构成线性无关集. 显然其线性组合全体在 H 中稠密,利用格兰姆-许密特方法将它正交化,得到就范直交系 F. 容易验证 $\overline{\mathrm{span}}\{F\}=\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}=H$,所以 F 是 H 的直交系,F 中有可数多个元.

反之,若 H 的直交系有可数多个元,则其中任意有限多个有理(或实部与虚部均为有理数的复数)系数线性组合在 H 中稠密,这些元素的全体至多为可数集,故 H 可分.

(2)若 F 为可数的无穷集,定义

$$\varphi: H\to l^2,\quad \varphi(x)=((x,e_1),(x,e_2),\cdots),$$

由黎斯-费舍尔定理,φ 是 H 上的线性映射,所以 $\forall\ x,y\in H$,有

$$\begin{aligned}(\varphi(x),\varphi(y))&=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}\\&=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,\sum_{i=1}^{n}(y,e_i)e_i\Big)\\&=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i,\sum_{i=1}^{\infty}(y,e_i)e_i\Big)=(x,y).\end{aligned}$$

特别地,若 $x=y$,则 $\|\varphi(x)\|=\|x\|$,φ 是等距的一一映射,H 与 l^2 同构.

(3)可以看做(2)的一个特例.

例 12 证明:若希尔伯特空间 H 的直交维数为有限,则它等于 H 作为一向量空间的维数. 反之,若后者有限,其维数亦为前者.

证 由完全性定理知，一个有限完全直交系 $F=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\subset H$ 是 H 作为向量空间的一个基. 反之，若向量空间是 n 维的，且 B 是含 n 个元素的基，则对 B 进行格兰姆-许密特过程，必可得到 n 个元素的完全就范直交系.

例 13 设 f 是单位圆 $|z|<1$ 中的解析函数，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$，将这种解析函数全体记为 H_0. 证明：H_0 按普通的线性运算和内积 $(f,g)=\lim\limits_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta$ 成为复希尔伯特空间. 设 $\{e_n(z)\}$ 是 H_0 中的一个完备就范直交系，证明：当 $|z|<1$，$|t|<1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z)\overline{e_n(t)}=\frac{1}{1-z\,\overline{t}}.$$

证 由定义，$\forall\ f,g\in H_0$，有

$$\begin{aligned}(f,g)&=\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta\\&=\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b}_nr^ne^{-in\theta}\Big)\mathrm{d}\theta\\&=\lim_{r\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{b}_nr^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{b}_n.\end{aligned}$$

因为 $\sum|a_n|^2<\infty$，$\sum|b_n|^2<\infty$，所以运算中求积与求极限交换次序是合理的. 作映射 $\varphi: H_0\to l^2$，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\to(a_0,a_1,\cdots),$$

则 φ 是双射，保持线性运算，且 $(f,g)=(\varphi(f),\varphi(g))$，所以 φ 是等距同构. 由于 l^2 是完备的，所以 H_0 是希尔伯特空间.

又由计算可知，$\{1,z,z^2,\cdots\}$ 是 H_0 中的就范直交系，而它们的线性组合全体在 H_0 中稠密，所以是完备就范直交系，从而

$$e_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(e_n,z^k)z^k,\quad z^n=\sum_{i=1}^{\infty}(z^n,e_i)e_i.$$

于是，当$|z|<1$，$|t|<1$时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(t)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}(e_n,z^k)z^k\Big]\Big[\sum_{l=0}^{\infty}\overline{(e_n,z^l)t^l}\Big]$$

$$=\sum_{k,l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(z^l,e_n)\overline{(z^k,e_n)}z^k\,\overline{t}^l=\sum_{k,l=0}^{\infty}(z^l,z^k)z^k\,\overline{t}^l$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\,\overline{t}^k=\frac{1}{1-z\overline{t}}.$$

例 14 设$H_n(t)$是埃尔米特多项式$(-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$，又

$$\psi_n(t)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}e^{-t^2/2}H_n(t),$$

证明：$\{\psi_n\}$，$n=0,1,2,\cdots$组成$L^2(-\infty,\infty)$中的就范直交系.

证 利用数学归纳法可得$H_n'(t)=2nH_{n-1}(t)$，且$H_0=1$，$H_1=2t$，$\cdots$，H_n为n次多项式. 当$n>m$时，有

$$(\psi_n,\psi_m)=\int_{-\infty}^{\infty}(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}e^{-t^2/2}(2^m m!\sqrt{\pi})^{-1/2}\cdot e^{-t^2/2}H_n(t)H_m(t)dt$$

$$=(2^{n+m}n!\ m!\ \pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}H_n(t)H_m(t)dt,$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n(t)H_m(t)e^{-t^2}dt=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_m(t)\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}dt$$

$$=(-1)^{n-1}2m\int_{-\infty}^{\infty}H_{m-1}(t)\frac{d^{n-1}e^{-t^2}}{dt^{n-1}}dt$$

$$=\cdots=(-1)^{n-m}2^m\cdot m!\ \int_{-\infty}^{\infty}H_0(t)\frac{d^{n-m}e^{-t^2}}{dt^{n-m}}dt$$

$$=\begin{cases}0, & n>m,\\ 2^n n!\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=2^n n!\sqrt{\pi}, & n=m,\end{cases}$$

所以，$\{\psi_n\}$为就范直交系.

例 15 设$L_n(t)$是勒让德多项式$e^t\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$，证明：$\left\{\dfrac{1}{n!}e^{-1/2}L_n(t)\right\}$，$n=1,2,\cdots$组成$L^2(0,\infty)$中的就范直交系.

证 L_n 是 n 次多项式. 当 $n>k$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^kL_n(t)\mathrm{d}t &=\int_0^{\infty}t^k\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\\ &=-k\int_0^{\infty}t^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t^n\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t=\cdots\\ &=(-1)^kk!\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}t^{n-k}}(t^n\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

因此,当 $n>m$ 时,有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}L_n(t)L_m(t)\mathrm{d}t=0,$$

当 $n=m$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}L_n^2(t)\mathrm{d}t &=\int_0^{\infty}(-1)^nt^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\\ &=n!\int_0^{\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=(n!)^2,\end{aligned}$$

从而知 $\left\{\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-1/2}L_n(t)\right\}$ 是就范直交系.

例16 一个给定的希尔伯特空间 $H(H\neq\{\theta\})$ 中,所有完全就范直交系均有相同的势,称为希尔伯特维数(或 H 的直交维数). 设 H 和 $\widetilde{H}$ 是同一数域 K 上的两个希尔伯特空间,证明:其为同构的充要条件是它们有相同的希尔伯特维数.

证 必要性 若 H 与 $\widetilde{H}$ 同构,则存在双射线性映射 $T:H\to\widetilde{H}$,且满足 $(Tx,Ty)=(x,y)$,即保持内积不变. 于是,T 将 H 中每一完全就范直交系映射到 $\widetilde{H}$ 中的一完全就范直交系,故 H 与 $\widetilde{H}$ 有相同的希尔伯特维数.

充分性 设 H 与 $\widetilde{H}$ 有相同的希尔伯特维数,当 $H=\{\theta\}$ 与 $\widetilde{H}=\{\theta\}$ 时,H 与 $\widetilde{H}$ 同构是显然的. 设 $H\neq\{\theta\}$,则 $\widetilde{H}\neq\{\theta\}$,对 H 中任一完全就范直交系 M 与 $\widetilde{H}$ 中任一完全就范直交系 $\widetilde{M}$ 有相同的基数,故可用相同的指标集 $\{k\}$ 进行标号,可记 $M=\{e_k\}$,$\widetilde{M}=\{\tilde{e}_k\}$.

构造一个从 H 到 $\widetilde{H}$ 的映射 T,$\forall\ x\in H$,由于 M 是完全就范直交系,由完全性定理知,$x=\sum\limits_k(x,e_k)e_k$. 又由贝塞耳不等式,有

$\sum_k |(x,e_k)|^2<\infty$. 定义

$$\tilde{x}=Tx=\sum_k (x,e_k)\tilde{e}_k, \qquad ①$$

此级数是收敛的,故$\tilde{x}\in\tilde{H}$. 由内积对第一变元的线性性,易证T为线性算子. 故由式①与$x=\sum_k (x,e_k)e_k$可得

$$\|\tilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k |(x,e_k)|^2=\|x\|^2,$$

从而知T是等距的.

由内积空间的极化恒等式可证得,若$Tx=Ty$,则

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0,$$

即$x=y$,内积保持不变,T是单射.

又,对于$\tilde{H}$中任意给定的$\tilde{x}=\sum_k (\tilde{x},\tilde{e}_k)\tilde{e}_k$,由贝塞耳不等式$\sum_k |(\tilde{x},\tilde{e}_k)|^2<\infty$知,级数$\sum (\tilde{x},\tilde{e}_k)\tilde{e}_k$在$H$中收敛,令其收敛于$x$,且$(\tilde{x},e_k)=(x,e_k)$,则由式①得$\tilde{x}=Tx$,即$T$为满射.

综上即知,H与$\tilde{H}$同构.

例17 在$L^2[-1,1]$中,将$x_0(t)=1, x_1(t)=t, x_2(t)=t^2$用格兰姆-许密特方法化为就范直交系.

解 显然,x_0,x_1,x_2是线性无关的.

取$e_0=x_0/\|x_0\|=1/\sqrt{2}$,且知$\|e_0\|=1$. 因为

$$(x_1,e_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t=0,$$

所以 $$\|x_1-(x_1,e_0)e_0\|^2=\|x_1\|^2=\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3},$$

故可取$e_1=t\Big/\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}t$,则$\|e_1\|=1, (e_1,e_0)=0$.

又因 $$(x_2,e_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$(x_2,e_1)=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} t^3\mathrm{d}t=0,$$

$$\| x_2-(x_2,e_0)e_0-(x_2,e_1)e_1 \|^2=\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2 dt=\frac{8}{45},$$

故可取

$$e_3=\sqrt{\frac{45}{8}}[x_2-(x_2,e_0)e_0-(x_2,e_1)e_1]=\frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2-1).$$

从而，得到$(1,t,t^2)$正交化后的就范直交系为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}t,\frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2-1)\right).$$

例 18 在$L^2[0,2\pi]$中，记

$$F=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\right\},$$

又记
$$f_0(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right),$$

则$f_0\in L^2[0,2\pi]$. 令

$$H_0=\left\{\alpha_0 f_0+\sum_{v=1}^{n}(\alpha_v\cos vt+\beta_v\sin vt)\,|\,n>0,\alpha_0,\alpha_v,\beta_v\in\gamma\right\},$$

按$L^2[0,2\pi]$的运算与内积，H_0是内积空间，F是H_0中的就范直交系，证明：F在H_0中是不完备的.

证 即要证f_0关于F的巴塞瓦等式不成立.

若$f\in H_0$，$f\perp F$，设

$$f(t)=\alpha_0 f_0(t)+\sum_{v=1}^{n}(\alpha_v\cos vt+\beta_v\sin vt),$$

则对于$k>n$，有

$$0=\left(f,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{\alpha_0}{k^2}\Rightarrow\alpha_0=0;$$

对于$k\leqslant n$，有

$$0=\left(f,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right)=\alpha_k,\quad 0=\left(f,\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right)=\beta_k.$$

所以
$$f=0,\quad 即\quad F^{\perp}=\{0\}.$$

同时，又可由计算得

$$\| f_0 \|^2 = 2\pi + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{v^2},$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| \left(f_0, \frac{\cos vt}{\sqrt{\pi}} \right) \right|^2 + \sum_{v=1}^{\infty} \left| \left(f_0, \frac{\sin vt}{\sqrt{\pi}} \right) \right|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{v^2},$$

所以f_0关于F的巴塞瓦等式不成立，即F在H_0中不是完备就范直交系.

在希尔伯特空间时，就范直交系F是完备的充要条件是$F^{\perp}=\{0\}$，但H是一般内积空间时，$F^{\perp}=\{0\}$是必要的，但不是充分的. 例18说明了这一点.

例19 设H为希尔伯特空间，$F=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是H中就范直交系，$E=\overline{\mathrm{span}F}$，证明下列命题等价：

(1)F为就范直交基； (2)$E=H$；

(3)$\forall\ x\in H$，有$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 若F为就范直交基，则$\forall\ x\in H$，有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,$$

而$\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\in E$，故$x\in\overline{E}=E$，从而$E=H$.

(2)$\Longrightarrow$(3). 由题设$H=E=\overline{\mathrm{span}F}$，即$\mathrm{span}F$在$H$上稠密，所以$\forall\ x\in H$，存在

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\in\mathrm{span}F,$$

使得$x_n\to x\quad(n\to\infty)$，即

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k.$$

由内积的连续性与$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的就范直交性，得

$$(x,e_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k'=1}^{n}\alpha_k e_k,e_k\right)=(\alpha_k e_k,e_k)=\alpha_k,$$

故F是完备就范直交系.

(3)$\Longrightarrow$(1). 若 F 为完备就范直交系，则$\forall\ x\in H$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,e_n)e_n$，且若 $x\perp F$，必有$(x,e_n)=0$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，从而 $x=\theta$，所以 F 为就范直交基.

例20 设$F=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是希尔伯特空间$H$ 的就范直交系，证明:F 完备的充要条件是$F^{\perp}=\{0\}$.

证 必要性 若F 是完备的，则$\forall\ x\in H$，有 $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$. 因此，如果$x\in F^{\perp}$，必有$(x,e_\lambda)=0$，$\lambda\in\Lambda$. 从而 $x=0$，即 $F^{\perp}=\{0\}$.

充分性 若$F^{\perp}=\{0\}$，并记F 张成的闭子空间为M，则由H 的完备性知，M 也是完备的，若 $M\neq H$，则由本章第二节投影定理的推论 1 知，必有非零元 $x\perp M$，$x\perp F^{\perp}$，导出与题设矛盾，所以 $M=H$，即 F 完备.

条件 $F^{\perp}=\{0\}$表示 H 中不存在与 F 直交的非零向量，可以解释为直交系已是 H 中的极大就范直交系了，即 F 不能再扩大了.

例21 设$M=\{e_j\}$为内积空间的就范直交系，证明:

(1)若M 在X 中是完全的，则不存在非零的$x\in X$ 与M 的每个元素直交，即

$$x\perp M\Longrightarrow x=\theta;\qquad ②$$

(2)若 X 为希尔伯特空间，则式②是 M 为完全的充分条件.

证 (1)设H 是X 的完备内积空间，则X 为H 的稠密子空间. 因为M 在X 中是完全的，所以由定义，span$M$ 在X 中稠密，即在H 中稠密，再由投影定理推论 2，有 $M^{\perp}=\{\theta\}$，即式②成立.

(2)若X 是希尔伯特空间，即$X=H$. 若M 为X 中一就范直交系且满足式②，则由投影定理推论可知$\overline{\mathrm{span}M}=X$，所以 M 是完全的.

例22 设H 和 $\widetilde{H}$ 是同一数域K 上的两个希尔伯特空间，证明:H 与 $\widetilde{H}$ 同构的充要条件是它们有相同的希尔伯特维数.

证 若 $H\neq\{\theta\}$是希尔伯特空间，则其所有完全就范直交系有相同的势，称为希尔伯特维数或直交维数(若 $H=\{\theta\}$，维数定义为

零).

必要性　若H与$\widetilde{H}$同构,则必存在双射线性算子$T:H\to\widetilde{H}$,且满足$(Tx,Ty)=(x,y)$,于是T将H中每一完全就范直交系映为$\widetilde{H}$中一完全就范直交系,从而H与$\widetilde{H}$有相同的希尔伯特维数.

充分性　设H与$\widetilde{H}$有相同的希尔伯特维数,若$H=\{\theta\}$或$\widetilde{H}=\{\theta\}$,H与$\widetilde{H}$显然同构;若$H\neq\{\theta\}$,则$\widetilde{H}\neq\{\theta\}$.由于$H$中任一完全就范直交系$M$与$\widetilde{H}$中任一完全就范直交系$\widetilde{M}$有相同的基数,故可以用相同的指标集$\{k\}$进行标号,记$M=\{e_k\}$,$\widetilde{M}=\{\widetilde{e}_k\}$.

构造一个从H到$\widetilde{H}$的映射,则$\forall\ x\in H$,因为M是完全就范直交系,故必是完备的,则有

$$x=\sum_k(x_k,e_k)e_k.$$

由贝塞耳不等式,有

$$\sum_k|(x_k,e_k)|^2<\infty.$$

定义

$$\widetilde{x}=Tx=\sum_k(x,e_k)\widetilde{e}_k,$$

则级数一定收敛,所以$\widetilde{x}\in\widetilde{H}$.由于内积对第一变元是线性的,故易证$T$为线性算子.由上面结果可得

$$\|\widetilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k|(x_k,e_k)|^2=\|x\|^2,$$

从而知T是等距的.由内积空间的极化恒等式可知T保持内积不变.若$Tx=Ty$,则

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0,$$

从而$x=y$.由算子的性质知,T为单射.

最后证明T是满射.$\forall\ \widetilde{x}\in\widetilde{H}$,有

$$\widetilde{x}=\sum_k(\widetilde{x},\widetilde{e}_k)\widetilde{e}_k,$$

由贝塞耳不等式$\sum\limits_k|(\widetilde{x},\widetilde{e}_k)|^2<\infty$知,级数$\sum\limits_k(\widetilde{x},\widetilde{e}_k)\widetilde{e}_k$在$H$中收敛.不妨设收敛于$x$,且$(\widetilde{x},\widetilde{e}_k)=(x,e_k)$.故由$\widetilde{x}=Tx=\sum\limits_k(x,e_k)\widetilde{e}_k$

得到$\widetilde{x}=Tx$，即T为满射，从而H与$\widetilde{H}$同构.

第四节　共轭空间与共轭算子

主要内容

1. **定理1（黎斯定理）**　设H是希尔伯特空间，F是H上的连续线性泛函，则必有向量$y\in H$，使得$\forall\ x\in H$，都有

$$F(x)=(x,y),\ x\in H, \qquad ①$$

使式①成立的y由F惟一确定，且$\|F\|=\|y\|$.

2. 作希尔伯特空间H到其共轭空间H^*的映射$T: H\to H^*$，$y\mapsto F_y$，$y\in H$，其中F_y是由y导出的泛函. 由黎斯定理，T是双射，且保持范数不变.

对于实空间，T是H到H^*的保范线性同构.

对于复空间，T是H到H^*的保范共轭线性同构.

3. **定理2**　设H是希尔伯特空间，G是内积空间，A是$H\to G$的有界线性算子，则必有$G\to H$的有界线性算子B，使得$\forall\ x\in H$，$y\in G$，有

$$(Ax,y)=(x,By). \qquad ②$$

式②左端表示G中的内积，右端表示H中的内积.

定义1　设H和G是两个内积空间，A是$H\to G$的有界线性算子，又设A^*是$G\to H$的有界线性算子，满足

$$(Ax,y)=(x,A^*y),\quad x\in H,y\in G,$$

则称A^*是A的**共轭算子（或伴随算子）**.

4. **定理3**　设H和K是希尔伯特空间，G是内积空间，若$A,B\in B(H\to G)$，$C\in B(K\to H)$，α,β是复数，则：

(1)$(A^*)^*=A$；　(2)$\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$；

(3)$(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$；　(4)$(AC)^*=C^*A^*$；

(5)A为正则算子的充要条件是A^*为正则算子，当A正则时，

有$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

若$A\in B(H\to H)$,则又有以下两点：

(6)$\rho(A^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\rho(A)\}$, $\sigma(A^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\sigma(A)\}$;

(7)设λ是A的特征值,x是相应的特征向量,又设μ是A^*的特征值,y是相应的特征向量,则当$\lambda\neq\mu$时,$x\perp y$.

定理4 设H,G为希尔伯特空间,A是$H\to G$的有界线性算子. $N(A)$和$N(A^*)$分别表示A和A^*的零空间,$R(A)$与$R(A^*)$分别表示A和A^*的值域,则

$$N(A)=R(A^*)^{\perp},\quad N(A^*)=R(A)^{\perp}, \tag{③}$$

$$\overline{R(A)}=N(A^*)^{\perp},\quad \overline{R(A^*)}=N(A)^{\perp}. \tag{④}$$

5. **定义2** 设A是希尔伯特空间$H\to H$的有界线性算子,若$A^*=A$,则称A是**自共轭算子**(**或自伴算子**).

定理5 设A是复希尔伯特空间H上的有界线性算子,则A是自共轭算子的充要条件是$\forall\ x\in H$,(Ax,x)是实数.

6. **定义3** 设X与Y是同一数域K上的向量空间,若映射$h:X\times Y\to K$满足下列性质:$\forall\ x_1x_2\in X$及$\forall\ y_1,y_2\in Y$,$\forall\ \alpha,\beta\in K$,有:

(1)$h(x_1+x_2,y)=h(x_1,y)+h(x_2,y)$,

(2)$h(x,y_1+y_2)=h(x,y_1)+h(x,y_2)$,

(3)$h(ax,y)=ah(x,y)$,

(4)$h(x,\beta y)=\beta h(x,y)$,

则称h是$X\times Y$上的复双线性泛函. 若$K=\mathbf{R}$,则h称为双线性泛函.

定理6 设H_1,H_2为希尔伯特空间,且$h:H\times H\to K$为有界复双线性泛函,则有表示式

$$h(x,y)=(Sx,y), \tag{⑤}$$

其中$S:H_1\to H_2$是一有界线性算子,且由h惟一确定,并有范数

$$\|S\|=\|h\|.$$

有界双线性泛函满足

$$|h(x,y)|\leqslant \|h\|\ \|x\|\ \|y\|. \qquad ⑥$$

疑难解析

1. 希尔伯特空间的共轭空间有什么特殊性？

答 赋范线性空间有共轭空间与共轭算子的概念，作为特殊的赋范线性空间，当然也有共轭空间与共轭算子的概念. 但是希尔伯特空间H的共轭空间有其独特之处，即希尔伯特空间H与它的共轭空间H^*可以视为一致，从而将共轭空间上的共轭算子概念引进到希尔伯特空间本身上去.

在希尔伯特空间H与其共轭空间H^*之间建立的双射T：$H\to H^*$，$y\mapsto F_y$，$y\in H$，还保持范数不变. 易证：当H是实空间时，T是H到H^*的保范线性同构；当H是复空间时，T是H到H^*的保范共轭线性同构. 在同构T的作用下，可以将向量y看做泛函F_y，把泛函F_y看做向量y，从而使H与H^*一致化. 这称为希尔伯特空间的自共轭性，或称希尔伯特空间是自共轭的空间.

2. 希尔伯特空间的共轭算子与赋范线性空间的共轭算子概念是否相同？

答 希尔伯特空间是一种特殊的赋范线性空间，它的共轭算子概念是用内积直接定义的，这个定义不包含在赋范线性空间的共轭算子的概念之中.

对于两个有界线性算子A，B及两个复数α，β，按赋范线性空间共轭算子的概念，有

$$(\alpha A+\beta B)^*y(x)=y((\alpha A+\beta B)x)=\alpha y(Ax)+\beta y(Bx)$$
$$=\alpha A^*y(x)+\beta B^*y(x),$$

因而
$$(\alpha A+\beta B)^*=\alpha A^*+\beta B^*.$$

在希尔伯特空间中，因为

$$y(Ax)=A^*y(x),\quad (Ax,y)=(x,A^*y),\quad x,y\in H$$

是一致的，所以按内积空间共轭算子的概念，有

$$(x,(\alpha A+\beta B)^*y)=((\alpha A+\beta B)x,y)=(x,(\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*)y),$$

所以 $$(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*.$$

可以看到，对于复空间，两个共轭算子概念有所不同；对于实空间，两个共轭算子概念是完全一致的.

方法、技巧与典型例题分析

要求理解希尔伯特空间上连续线性泛函的表示，熟悉黎斯定理并会应用它证明命题. 要求熟知共轭空间与共轭算子的概念与性质，能较熟练地运用它们讨论问题.

例1 证明：$\mathbf{R}^3$ 上任一线性泛函可由点积表示：$f(x)=x\cdot z=\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+\xi_3\zeta_3$.

证 由于 $\mathbf{R}^3$ 是希尔伯特空间，由黎斯定理，可得 $f(x)=(x,z)$，故当

$$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\quad z=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$$

时，有 $$f(x)=(x,z)=\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+\xi_3\zeta_3.$$

故 $\mathbf{R}^3$ 上任一线性泛函是有界的，其内积即点积.

例2 证明：l^2 上任一有界线性泛函 f 可表示为下列形式：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{\alpha}_i\quad(\alpha=(\alpha_i)\in l^2,\ \forall\ x\in l^2).$$

证 设 $x=(x_1,x_2,\cdots),\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$，

则 $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\alpha}_i x_i,$$

且 $$\|f\|=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\Big)^{1/2}.$$

例3 设 z 为内积空间 X 中任一固定元素，证明：$f(x)=(x,z)$ 是定义在 X 上一有界线性泛函，其范数为 $\|z\|$.

证 因为

$$|f(x)|=|(x,z)|\leqslant\|z\|\ \|x\|,$$

所以 $|f|\leqslant\|z\|$ 是有界线性泛函.

当 $z=\theta$ 时，有 $\|f\|=\|z\|$；当 $z\neq\theta$ 时，有 $\|f\|\ \|z\|>$

$|f(z)|=(z,z)=\|z\|^2$，$\|f\|\geqslant\|z\|$．综合两式得$\|f\|=\|z\|$．

例 4 对例 3，若映射 $X\to X^*$ 由 $z\mapsto f$ 给定，且为满射，证明：X 必为希尔伯特空间.

证 记 $z\mapsto f_z$，令 $\{z_n\}$ 是 X 中的柯西序列，则 $\|fz_n\|=\|z_n\|$．可证明 $\{fz_n\}$ 是 X^* 中的柯西序列且收敛，即 $fz_n\to f$．又由满射知，存在 z，使得 $z\mapsto f$，且

$$\|z_n-z\|=\|fz_n-f\|\to 0,\quad z_n\to z,$$

所以，X 是完备的，故 X 是希尔伯特空间.

例 5 证明：黎斯定理定义了一个等距双射 $T:H\to H^*$，$z\mapsto f_z=(\ast,z)$，它不是线性的但为共轭线性的.

证 由黎斯定理知，$\|f\|=\|z\|$，所以

$$\|f_z-f_v\|=\|f_{z-v}\|=\|z-v\|,$$

且
$$f_{\alpha z+\beta v}(x)=(x,\alpha z+\beta v)=\bar{\alpha}(x,z)+\bar{\beta}(x,v)$$
$$=\bar{\alpha}f_z(x)+\bar{\beta}f_v(x),$$

故它不是线性的但为共轭线性.

例 6 设 H 为希尔伯特空间，若 $\forall f\in H$，数列 $\{(f,g_n)\}$ 均为基本序列，则称点列 $\{g_n\}$ 为 H 中的弱基本点列．若 H 中任一弱基本点列都有属于 H 的弱收敛的极限，就称空间是序列弱完备的．证明：每一个希尔伯特空间均为序列弱完备的.

证 设 $\{g_n\}$ 是 H 中任一弱基本点列，则 $\forall f\in H$，$\{(f,g_n)\}$ 也是基本点列，因而是有界的．$\forall n\in\mathbf{N}$，(f,g_n) 是 H 上的连续线性泛函，其范数为 $\|g_n\|$．由有界性，则依共鸣定理知，$\{g_n\}$ 是有界点列，$\|g_n\|\leqslant M<\infty$，$n=1,2,\cdots$ 成立.

$\forall f\in H$，记 $G(f)=\lim\limits_{n\to\infty}(f,g_n)$，其极限存在，且是 H 上的线性泛函，有

$$|G(f)|=\lim_{n\to\infty}|(f,g_n)|\leqslant\|f\|M.$$

所以，$G(f)$ 又是 H 上的有界线性泛函．于是，依黎斯定理，存在 $g\in H$，使得

$$G(f)=(f,g),\quad f\in H,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}(f,g_n)=(f,g).$$

上式说明，$\{g_n\}$存在弱收敛的极限g，故H是序列弱完备的.

例7 设T是$l^2\to l^2$的有界线性算子，对于$\{x_i\}\in l^2$，有$Tx=\{y_j\}$，$T^*x=\{y_j^*\}$，其中$y_j=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}x_i$，$y_j^*=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}^*x_i$，证明：

$$a_{ji}^*=\bar{a}_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

证 任取$z=(z_1,z_2,\cdots)\in l^2$，则

$$(z,Tx)=\sum_j z_j\bar{y}_j=\sum_j z_j\sum_j\bar{a}_{ji}x_i=\sum_i\Big(\sum_j\bar{a}_{ji}z_j\Big)\bar{x}_i.$$

等式中可以交换求和次序是因为T是l^2到l^2的有界算子，因而式中的级数均是绝对收敛的.

又
$$(z,Tx)=(T^*z,x),$$

故
$$T^*z=\sum_j\bar{a}_{ji}z_j,$$

于是有
$$a_{ji}^*=\bar{a}_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

例8 设H为希尔伯特空间，T为H上的有界线性算子，$\|T\|\leqslant 1$，证明：

$$\{x\,|\,Tx=x\}=\{x\,|\,T^*x=x\}.$$

证 当$Tx=x$时，有

$$(T^*x,x)=(x,T^*x)=\|x\|^2,$$

故
$$\begin{aligned}\|T^*x-x\|^2&=\|T^*x\|^2+\|x\|^2-(T^*x,x)-(x,T^*x)\\&=\|T^*x\|^2-\|x\|^2\leqslant\|T^*\|^2\|x\|^2-\|x\|^2\\&=\|T\|^2\|x\|^2-\|x\|^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

即
$$T^*x=x.$$

因此

$$\{x\,|\,Tx=x\}\subset\{x\,|\,T^*x=x\}\subset\{x\,|\,T^{**}x=x\}=\{x\,|\,Tx=x\},$$

从而
$$\{x\,|\,Tx=x\}=\{x\,|\,T^*x=x\}.$$

例9 证明：希尔伯特空间H上每一个有界序列有弱收敛的子序列.

证 当$H=\{\theta\}$时，结论显然成立. 设$H\neq\{\theta\}$，并设$\{u_n\}$是有界序列，即$\|u_n\|\leqslant M$.

(1)设H是可分的，$\{v_n\}$是H的可数稠子集. 因为

$$\|(u_n,v_1)\|\leqslant\|u_n\|\ \|v_1\|\quad(\forall\ n\in\mathbf{N}),$$

且$\{u_n\}$是有界的，故(u_n,v_1)是C中的有界数列，必有有界子列$\{u_{1n}\}$，使得$(u_{1n},v_1)\to\alpha_1\quad(n\to\infty)$；进而存在$\{u_{1n}\}$的子列$\{u_{2n}\}$，使得$(u_{2n},v_2)\to\alpha_2\quad(n\to\infty)$；反复继续下去……，即有

$$\begin{array}{lll}(u_{11},v_1),(u_{12},v_1),\cdots & \to\alpha_1, \\ (u_{21},v_2),(u_{22},v_2),\cdots & \to\alpha_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad \vdots\end{array}$$

取对角线序列$\{\omega_n\}=\{u_{nn}\}$，则$\{\omega_n\}$有性质

$$(\omega_n,v_k)\to\alpha_k,\ n\to\infty,\ k=1,2,\cdots.$$

$\forall\ v\in H$，因为$\{v_n\}$在H中稠密，故存在v_{k_0}，使得

$$\|v-v_{k_0}\|<\varepsilon/(4M).$$

而$|(\omega_n,v_{k_0})|$关于n是收敛序列，则存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$n,m>N$时，有

$$|(\omega_n-\omega_m,v_{k_0})|<\varepsilon/2,$$

使得$|((\omega_n-\omega_m),v)|\leqslant\|\omega_n-\omega_m\|\ \|v-v_{k_0}\|+|(\omega_n-\omega_m,v_{k_0})|$

$$\leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

从而，$\{(\omega_n,v)\}$是柯西序列，是收敛的.

因此，$\forall\ v\in H$，存在数$\alpha(v)$，使得

$$(\omega_n,v)\to\alpha(v),\quad n\to\infty,\forall\ v\in H. \qquad ①$$

由式①得映射$v\to\alpha(v)$是线性的，且有

$$|\alpha(v)|\leqslant\|v\|\sup_n\|\omega_n\|,\ \forall\ v\in H,$$

则$\alpha(v)$为有界线性泛函，依黎斯定理，存在$\omega\in H$，使得

$$\alpha(v)=(\omega,v),\ \forall\ v\in H.$$

由式①知 $\quad(\omega_n,v)\to(\omega,v)\ (n\to\infty,\forall\ v\in H).$

从而，ω_n弱收敛于$\omega(n\to\infty)$.

(2)设 H 是不可分的，若令 $Y=\overline{\text{span}\{u_1,u_2,\cdots\}}$，则 Y 是可分的，因为所有下列形式的有限线性组合

$$(\beta_1+\gamma_1 \mathrm{i})u_1+\cdots+(\beta_n+\gamma_n \mathrm{i})u_n, \quad \beta_j,\gamma_j\in C, j=1,2,\cdots,n$$

是一个可数集，且在 Y 中稠密.

由题(1)，在子空间 Y 中，存在 $\{u_n\}$ 的子列 $\{\omega_n\}$ 及固定的 $\omega\in Y$，使得

$$(\omega_n,v)\to(\omega,v), \ n\to\infty, \forall\ v\in Y. \qquad ②$$

设 $z\in H$，则由投影定理

$$z=v+v^*, \ v\in Y, \ v^*\in Y^{\perp}.$$

因为 $(y,v^*)=0(\forall\ y\in Y)$，则

$$(\omega_n,z)\to(\omega,z)\ (n\to\infty), \forall\ z\in H,$$

从而 ω_n 弱收敛于 ω $(n\to\infty)$.

例10 设 X,Y 是赋范线性空间，证明：$X\times Y$ 上的有界复双线性泛函 h 是二元连续的.

证 因为

$$\begin{aligned}
&|h(x+\Delta x,y+\Delta y)-h(x,y)| \\
&=|h(x,y)+h(x,\Delta y)+h(\Delta x,y)+h(\Delta x,\Delta y)-h(x,y)| \\
&\leqslant|h(x,\Delta y)|+|h(\Delta x,y)|+|h(\Delta x,\Delta y)| \\
&\leqslant\|h\|\ \|x\|\ \|\Delta y\|+\|h\|\ \|\Delta x\|\ \|y\| \\
&\quad+\|h\|\ \|\Delta x\|\ \|\Delta y\|\to0\ (\Delta x\to0,\Delta y\to0)
\end{aligned}$$

所以，h 是二元连续的.

例 11 设 X 是向量空间，h 是 $X\times X$ 上的希尔伯特泛函，若 $\forall\ x\in X, h(x,y)\geqslant0$，则称 h 为半正定泛函. 证明：半正定泛函满足许瓦兹不等式 $|h(x,y)|^2\leqslant h(x,x)h(y,y)$.

证 若 $h(y,y)\neq0$，则必有 $h(y,y)>0$. 由

$$\begin{aligned}
0&\leqslant h(x-\alpha y,x-\alpha y) \\
&=h(x,x)-\bar{\alpha}h(x,y)-\alpha h(y,x)+|\alpha|^2h(x,y),
\end{aligned}$$

取
$$\alpha=h(x,y)/h(y,y),$$
得
$$h(x,x)-|h(x,x)|^2/h(y,y)\geqslant0.$$

若$h(x,x)\neq 0$,证明过程与上类似.

若 $$h(x,x)=h(y,y)=0,$$

则得 $$-\bar{\alpha}h(x,y)-\alpha h(y,x)\geqslant 0.$$

取$\alpha=h(x,y)$,得$-\alpha|h(x,y)|^2\geqslant 0$,从而$h(x,y)=0$,故半正定泛函$h$满足许瓦兹不等式.

例 12 设F是复希尔伯特空间H上的双线性泛函,即F是$H\times H$上的复值函数,满足

$$F(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1F(x_1,y)+\alpha_2F(x_2,y),$$

$$F(x,\beta_1y_1+\beta_2y_2)=\bar{\beta}_1F(x,y_1)+\bar{\beta}_2F(x,y_2),$$

$$\sup\{|F(x,y)|\,\big|\,\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1\}<\infty.$$

证明:惟一地存在H上的有界线性算子A,满足

$$F(x,y)=(Ax,y),\quad x,y\in H,$$

且 $$\|A\|=\sup\{|F(x,y)|\,\big|\,\|x\|=\|y\|=1\}.$$

证 对于任何固定的$y\in H$. 定义$f_y(x)=F(x,y)$,则f_y是H上的线性泛函,且有

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f_y(x)|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|F(x,y)|\leqslant\|y\|\sup_{\|x\|\leqslant 1}F\left(x,\frac{y}{\|y\|}\right).$$

由于$\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}F\left(x,\frac{y}{\|y\|}\right)<\infty$,所以$f_y\in H^*$,则由黎斯定理,必存在$\bar{A}y\in H$,使得

$$f_y(x)=(x,\bar{A}y),$$

即 $$(x,\bar{A}y)=F(x,y).$$

由此得到H上的映射$\bar{A}:X\to\bar{A}x$. 对于任何x,有

$$(x,\bar{A}y_1+\bar{A}y_2)=(x,\bar{A}y_1)+(x,\bar{A}y_2)=F(x,y_1)+F(x,y_2)$$

$$=F(x,y_1+y_2)=(x,\bar{A}(y_1+y_2)),$$

从而 $$\bar{A}(y_1+y_2)=\bar{A}y_1+\bar{A}y_2.$$

又 $(x,\lambda\bar{A}y)=\bar{\lambda}(x,\bar{A}y)=\bar{\lambda}F(x,y)=F(x,\lambda y)=(x,\bar{A}(\lambda y))$,

所以,$\bar{A}(\lambda y)=\lambda\bar{A}y$,故知$\bar{A}$是线性算子. 同时

$$\|\bar{A}\|\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|\bar{A}y\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}|(x,\bar{A}y)|$$

$$=\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}|F(x,y)|,$$

从而$\overline{A}$是有界线性算子，且

$$F(x,y)=(x,\overline{A}y)=(A^*x,y),$$

$$\|\overline{A}^*\|=\|\overline{A}\|=\sup\{|F(x,y)|\,|\,\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1\},$$

故取$A=\overline{A}^*$，即得所证有界线性算子.

例 13 设H是希尔伯特空间，$T:H\to H$是有界线性双射算子，其逆为有界，证明：$(T^*)^{-1}$存在，且$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

证 由题设知T^{-1}有界，则由共轭算子存在的惟一性知，$(T^{-1})^*$存在且有界. 于是，$\forall\ x,y\in H$，有

$$(x,y)=(T^{-1}Tx,y)=(Tx,(T^{-1})^*y)=(x,T^*(T^{-1})^*y),$$

$$(x,y)=(TT^{-1}x,y)=(T^{-1}x,T^*y)=(x,(T^{-1})^*T^*y),$$

从而 $\quad T^*(T^{-1})^*=(T^{-1})^*T^*=I,\quad (T^{-1})^*=(T^*)^{-1},$

即$(T^*)^{-1}$存在，且$(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$.

例 14 设T为复希尔伯特空间H上的有界线性算子，证明：$T=-T^*$的充要条件是对一切$x\in H$，$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$.

证 必要性 设$T=-T^*$，则

$$\mathrm{Re}(Tx,x)=\frac{1}{2}[(Tx,x)+(x,Tx)]$$

$$=\frac{1}{2}[(Tx,x)+(T^*x,x)]=0.$$

充分性 设$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$对一切$x\in H$都成立，则

$$((T+T^*)x,x)=0,\ x\in H.$$

由推广的极化恒等式知，$\forall\ x,y\in H$，有

$$((T+T^*)x,y)=0,$$

从而 $$T=-T^*.$$

例 15 设$\{A_n\}$是复希尔伯特空间上的一列自共轭算子，A是定义在全空间的算子，满足

$$\lim_{n\to\infty}(A_nx,y)=(Ax,y),\ x,y\in H,$$

证明：A也是自共轭算子.

证 先证A为$H\to H$的线性算子. 由内积的连续性,对任何数α,β和$\forall\ x_1,x_2,y\in H$,有

$$\begin{aligned}(A(\alpha x_1+\beta x_2),y)&=\lim_{n\to\infty}(A_n(\alpha x_1+\beta x_2),y)\\&=\lim_{n\to\infty}(\alpha A_n x_1,y)+\lim_{n\to\infty}(\beta A_n x_2,y)\\&=(\alpha Ax_1,y)+(\beta Ax_2,y)\\&=(\alpha Ax_1+\beta Ax_2,y),\end{aligned}$$

故
$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2.$$

又由题设知,取定$x\in H$,有

$$\lim_{n\to\infty}(A_n x,y)=(Ax,y),\quad y\in H,$$

则依黎斯定理知,$\{A_n x\}$弱收敛于Ax. 由共鸣定理知,$\{\|A_n x\|\}$为有界集,且$\{\|A_n\|\}$也是有界集,故存在常数$M<\infty$,使得$\|A_n\|\leqslant M,\ n=1,2,\cdots$. 从而

$$|(Ax,y)|=\lim_{n\to\infty}|(A_n x,y)|\leqslant M\|x\|\ \|y\|.$$

取$y=Ax$,即得

$$\|Ax\|^2\leqslant M\|x\|\ \|Ax\|\Longrightarrow\|A\|\leqslant M,$$

从而知A是$H\to H$的有界线性算子.

因为$\{A_n\}$是一列自共轭算子,则依定理5,$\forall\ x\in H$,$(A_n x,x)$为实数,而$(Ax,x)=\lim\limits_{n\to\infty}(A_n x,x)$也是实数,所以$A$为自共轭算子.

例16 设H为复希尔伯特空间,$T:H\to H$满足$(Tx,x)\geqslant 0$,其中x是H中的任意向量,证明:

$$|(Tx,y)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y),$$

其中x,y是H中的任意向量.

证 因为$\forall\ x\in H$,有$(Tx,x)\geqslant 0$,所以T为自共轭算子. 于是,$\forall\ \lambda\in C$与$\forall\ x,y\in H$,有

$$(T(x+\lambda y),x+\lambda y)\geqslant 0,$$

即
$$(Tx,x)+2\mathrm{Re}[\lambda(Ty,x)]+|\lambda^2|(y,y)\geqslant 0.$$

取$\lambda=-(x,Ty)/(Ty,y)$代入上面不等式,即得

$$|(Ty,x)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y).$$

由于 $$(Tx,y)=(x,Ty),$$
故 $$|(Tx,y)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y).$$

例 17 设$\{T_n\}$是 H 上的自共轭算子列，且 $\|T_n-T\|\to0$ $(n\to\infty)$，证明：T 是自共轭算子.

证 因为
$$\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|\to0,\ n\to\infty,$$
所以 $$\|T^*-T\|\leqslant\|T^*-T_n^*\|+\|T_n-T\|\to0,$$
故$T=T^*$，即T 是自共轭算子.

例 18 设T 是希尔伯特空间H 上的有界线性算子，证明：

(1)算子$T_1=\frac{1}{2}(T+T^*)$，$T_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(T-T^*)$是自共轭算子；

(2)$T=T_1+\mathrm{i}T_2$，$T^*=T_1-\mathrm{i}T_2$ 成立且惟一，即$T_1+\mathrm{i}T_2=S_1+\mathrm{i}S_2\Longrightarrow S_1=T_1,S_2=T_2$，其中$S_1$ 与S_2 均为自共轭算子.

证 (1)由题设可得
$$T_1^*=\frac{1}{2}(T+T^*)^*=\frac{1}{2}(T^*+(T^*)^*)=\frac{1}{2}(T^*+T)=T_1,$$
$$\begin{aligned}T_2^*&=\frac{-1}{2\mathrm{i}}(T-T^*)^*=\frac{-1}{2\mathrm{i}}(T^*-(T^*)^*)\\&=\frac{-1}{2\mathrm{i}}(T^*-T)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(T-T^*)=T_2,\end{aligned}$$
所以，T_1 与T_2 是自共轭算子.

(2)设$T_1+\mathrm{i}T_2=S_1+\mathrm{i}S_2$，则
$$T_1^*-\mathrm{i}T_2^*=S_1^*-\mathrm{i}S_2^*.$$
由T_1,T_2,S_1,S_2 均为自共轭算子，所以
$$T_1-\mathrm{i}T_2=S_1-\mathrm{i}S_2,$$
将上式与$T_1+\mathrm{i}T_2=S_1+\mathrm{i}S_2$ 分别相加、减，即得
$$T_1=S_1,\quad T_2=S_2.$$

例 19 设$T:H\to H$ 是有界自共轭线性算子，且$T\neq0$，证明：

(1)对于$n=2,4,8,16,\cdots$，$T^n\neq0$ 成立；

(2)$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$T^n\neq0$ 也成立.

证 (1)对取定的$x\in H$,由题设$Tx\neq 0$,故

$$0<\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^2x,x),$$

即$T^2\neq 0$.

类似可证$n=4,8,16,\cdots$时,$T^n\neq 0$.

(2)$T^n=0\Longrightarrow$对于每个$p>n$,有$T^p=T^{p-n}(T^n)=0$,导出与题(1)中结论$p=2^k>n$,$T^p\neq 0$矛盾,因此,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,$T^n\neq 0$恒成立.

例20 设$\{e_n|n=1,2,\cdots\}$是希尔伯特空间H上的完备就范直交系,$\{\alpha_n\}$是有界的实数列,记$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ie_i$为$(x_1,x_2,\cdots)$,算子$A$定义为

$$A:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n,\cdots),$$

其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in H$,证明:$A$是$H$上的有界自共轭算子.

证 由A的定义知,A的线性是显然的,而$\forall\ x\in H$,有

$$\|Ax\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_ix_i|^2\leqslant\sup_i|a_i|^2\|x\|^2,$$

所以A是有界的,且$\|A\|\leqslant\sup\limits_i|a_i|$.

任取

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in H,$$

有
$$(Ax,y)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\overline{y_i}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\,\overline{a_iy_i}=(x,Ay),$$

所以,$A=A^*$,即A是自共轭算子.

例21 设J是复希尔伯特空间H上的自共轭算子,$\forall\ x\in H$,有$(Jx,x)\geqslant\varepsilon(x,x)$,$\varepsilon>0$. 证明:

(1)H按内积$(x,y)=(Jx,y)$是希尔伯特空间,记为H_J;

(2)H_J中有界线性算子A为H_J中自共轭算子的充要条件是$JA=A^*J$,其中A^*是A在H中的共轭算子.

证 由题设J是自共轭算子知,$(*,*)$关于第一变元线性,关于第二变元共轭线性.

(1)若$(x,x)=0$,则$(Jx,x)=0$,从而$\varepsilon(x,x)=0$. 得$x=0$,所以

(＊，＊)是内积. 又因为

$$(x,x)=(Jx,x)\geqslant\varepsilon(x,x),\quad (x,x)=(Jx,x)\leqslant\|J\|\ \|x\|^2,$$

故由(＊，＊)与(＊，＊)诱导的范数等价，所以其完备性是一致的，从而H_J也是希尔伯特空间.

(2)A是H_J中的自共轭算子等价于$\forall\ x\in H$，(Ax,x)为实数，即(JAx,x)为实数，又等价于JA关于希尔伯特空间是自共轭算子，所以$(JA)^*=JA$，即

$$A^*J^*=JA\quad 或\quad A^*J=JA.$$

例22 在复希尔伯特空间H上，定义$A:H\to H$，且存在$\varepsilon>0$，使得$(Ax,x)\geqslant\varepsilon(x,x)$对于一切$x\in H$成立，证明：逆算子$A^{-1}$存在，且有$\|A^{-1}\|\leqslant\varepsilon^{-1}$.

证 因为$(Ax,x)\geqslant\varepsilon(x,x)\geqslant 0$，所以$A$是自共轭算子. 当$Ax=0$时，有$\varepsilon(x,x)=0$，故$x=0$，则$A^{-1}$存在.

$\forall\ x\in H$，$x\neq 0$，则$A^{-1}x\neq 0$，于是

$$\begin{aligned}\|A^{-1}x\|^2&=(A^{-1}x,A^{-1}x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(AA^{-1}x,A^{-1}x)\\&=\frac{1}{\varepsilon}(x,A^{-1}x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|x\|\ \|A^{-1}x\|,\end{aligned}$$

故有$\|A^{-1}x\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|x\|$，从而知$A^{-1}$是有界算子，且$\|A^{-1}\|\leqslant 1/\varepsilon$.

例23 设λ为复希尔伯特空间中有界线性算子A的特征值，则$\bar{\lambda}$是否一定为A^*的特征值？

解 不一定. 例如，在复空间l^2中考察

$$U(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots)(左移算子),$$

则
$$U^*(x_1,x_2,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots).$$

可以验证，有

$$\{\lambda\mid|\lambda|<1\}\subset\sigma_p(U)，但\ \sigma_p(A^*)=\varnothing,$$

其中$\sigma_p(A^*)$是算子A^*的特征值全体.

实际上，当$|\lambda|<1$时，有

$$U(\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\cdots)=(\lambda^2,\lambda^3,\cdots)=\lambda(\lambda_1,\lambda_2,\cdots),$$

所以，当$0<|\lambda|<1$时，λ是特征值，而$(1,0,\cdots)$是相应于$\lambda=0$的特征向量.

又 $$\lambda(x_1,x_2,\cdots)=U^*(x_1,x_2,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots),$$

如果$\lambda=0$，则$x_1=x_2=\cdots=0$；如果$\lambda\neq0$，则由递推也可得出$x_1=x_2=\cdots=0$.

例24 设A是希尔伯特空间H上的自共轭算子，证明：

(1)若λ是A的特征值，则λ必为实数；

(2)若λ,μ是A的两个不同的特征值，x,y分别是A的相应于λ和μ的特征向量，则$x\perp y$；

(3)对任何复数λ，当$\mathrm{Im}\lambda\neq0$时，$\lambda I-A$为正则算子，且$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant1/|\mathrm{Im}\lambda|$.

证 (1)设λ是A的特征值，$x\in H$，$x\neq0$，则由$Ax=\lambda x$，得

$$\lambda(x,x)=(Ax,x)=(x,Ax)=(x,\lambda x)=\bar{\lambda}(x,x).$$

因为$(x,x)\neq0$，所以$\lambda=\bar{\lambda}$，即λ为实数.

(2)设λ,μ是A的两个不同的特征值，有

$$\lambda(x,y)=(Ax,y)=(x,Ay)=(x,\mu y)=\bar{\mu}(x,y).$$

由题(1)知λ,μ均为实数，而$\lambda\neq\mu$，故必有$(x,y)=0$，从而$x\perp y$.

(3)若λ为复数，即$\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau$，$\sigma$，$\tau$均为实数，且$\tau\neq0$.

要证明$\lambda\in\rho(A)$，需证$(A-\lambda I)$具有定义于全空间的有界逆算子. 而H是完备的，$A-\lambda I$是有界线性算子，则由逆算子定理知，只要能证明$A-\lambda I$是$H\to H$的双射即可.

先证$A-\lambda I$是单射. 因为$\forall\ x\in H$，有

$$((A-\lambda I)x,x)=((A-\sigma I)x,x)-\mathrm{i}\tau(x,x),$$

其中$((A-\sigma I)x,x)$和$\tau(x,x)$是实数，所以

$$\|(A-\lambda I)x\|\ \|x\|\geqslant|((A-\lambda I)x,x)|\geqslant|\tau|\ \|x\|^2,$$

即 $$\|(A-\tau I)x\|\geqslant|\tau|\ \|x\|. \quad ③$$

从而知$A-\lambda I$是单射，且$\forall\ y\in R(A-\lambda I)$，有

$$\|(A-\lambda I)^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{|\tau|}\|y\|, \qquad ④$$

再证$A-\lambda I$是满射. 因为$A-\lambda I$是单射，故$A-\bar{\lambda}I$也是单射，从而

$$N((A-\lambda I)^*)=N(A-\bar{\lambda}I)=\{0\},$$

则由定理4可得

$$\overline{R(A-\lambda I)}=N((A-\lambda I)^*)^{\perp}=\{0\}^{\perp}=H.$$

于是$\forall\ y\in H$，必有$x_n\in H$，使得$(A-\lambda I)x_n\to y$. 于是$\{(A-\lambda I)x_n\}$为H中基本点列，由式③知，$\{x_n\}$也是基本点列，因而必存在$x_0\in H$，使得$x_n\to x_0$，且

$$(A-\lambda I)x_0=\lim_{n\to\infty}(A-\lambda I)x_n=y.$$

从而得到 $$R(A-\lambda I)=H.$$

由逆算子定理即知，$A-\lambda I$是正则算子，即$\lambda\in\rho(A)$，则由式④得

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant 1/|\mathrm{Im}\lambda|.$$

例25 设H是希尔伯特空间H的自共轭算子，证明：

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Tx,x)|.$$

证 因为对于$\|x\|\leqslant 1$，有

$$|(Tx,x)|\leqslant\|Tx\|\ \|x\|\leqslant\|T\|\ \|x\|^2\leqslant\|T\|,$$

所以 $$\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|.$$

记$\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|(Tx,x)|$为$r$，则$\forall\ x\in H$，当$x\neq 0$时，有

$$\left|\left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leqslant r \quad 或 \quad |(Tx,x)|\leqslant r\|x\|^2.$$

由自共轭性，通过计算可得

$$\begin{aligned}&(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)\\&=2(Tx,y)+2(Ty,x)=2(Tx,y)+2(y,Tx)\\&=4\mathrm{Re}(Tx,y),\end{aligned}$$

于是 $$|\mathrm{Re}(Tx,y)|\leqslant\frac{r}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$$
$$\leqslant\frac{r}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

取 $e^{i\theta}$ 使得

$$|(Tx,y)|=e^{i\theta}(Tx,y)=(T(e^{i\theta}x),y)$$
$$\leqslant\frac{r}{2}(\|e^{i\theta}x\|^2+\|y\|^2)=\frac{r}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

此式实际上 $\forall\ x,y\in H$ 均成立．若 $Tx\neq0$，令 $y=\frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx$，则代入以上方程得

$$\|Tx\|\leqslant r\|x\|^2,$$

于是 $$\|T\|\leqslant r=\sup_{\|x\|<1}|(Tx,x)|.$$

例 26 设 $S=I+T^*T:H\to H$，其中 H 为希尔伯特空间，T 为有界线性算子，证明：$S^{-1}:S(H)\to H$ 存在．

证 由许瓦兹不等式，有

$$\|x\|^2\leqslant\|x\|^2+\|Tx\|^2=(x,x)+(T^*Tx,x)$$
$$=(Sx,x)\|x\|,$$

因此，$Sx=\theta\Longrightarrow\|x\|=0$. 由逆算子定理，$S^{-1}:S(H)\to H$ 存在．

例 27 证明：在希尔伯特空间 H 上有界线性算子 $T:H\to H$ 的值域为有限维的充要条件能表示为

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}(x,v_j)w_j,\quad v_j,w_j\in H.$$

证 设 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 是关于 $T(H)=R(T)$ 的一组直交基，$x\in H$，$Tx=\sum_{j=1}^{n}a_j(x)b_j$，则

$$(Tx,b_k)=a_k(x)=(x,T^*b_k),$$

且 $$Tx=\sum_{j=1}^{n}(x,v_j)w_j\quad(w_j=b_j,v_j=T^*b_j).$$

第五节　投影算子

主要内容

1. 如果H是一个希尔伯特空间，L是H中的闭线性子空间，则$\forall x\in H$，必有相应的$y\in L$，$z\perp L$，使得$x=y+z$，称元素y为x在L上的投影. x在L上的投影是由x惟一决定的.

以上是希尔伯特空间上的投影定理.

2. **定义1**　L是希尔伯特空间H中任意取定的一个闭子空间，作算子P如下：对H中元x，令Px是x在L上的投影，则称P为由H到L上的**投影算子**，记做P或P_L.

投影算子有下列性质：

(1)投影算子必为线性有界算子；

(2)设P是希尔伯特空间H中的投影算子，则P将H投影到$PH=\{x\mid x\in H,Px=x\}$上.

(3)投影算子的范数或是0或是1.

3. **定理1**　设P是希尔伯特空间H中的有界线性算子，则P成为投影算子的充要条件是：P是自共轭($P=P^*$)而且幂等($P^2=P$)的算子.

定理2　设P是复希尔伯特空间H中的有界线性算子，则P成为投影算子的充要条件是：$\forall x\in H$，有$\|Px\|^2=(Px,x)$成立.

4. **定理3**　设P_L,P_M是两个投影算子，则$L\perp M$的充要条件是：$P_LP_M=0$.

定理4　设P_L,P_M是两个投影算子，则P_L+P_M是投影算子的充要条件是：$P_LP_M=0$，且当P_L+P_M是投影算子时，它就是$P_{L\oplus M}$.

定义2　如果两个投影算子P和Q满足$PQ=0$，则称P和Q是**直交的**，记做$P\perp Q$.

5. 定义3 设$\{L_n\}$是希尔伯特空间H中一列两两互相直交的闭线性子空间，作

$$L=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}x_i \mid x_i\in L_i, i=1,2,\cdots,\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<\infty\right\},$$

则称L为$\{L_n\}$的**直交和**，记做$L=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}L_i$.

定理5 设P_n $(n=1,2,\cdots)$是希尔伯特空间H中一列两两直交的投影算子，则必有投影算子P，使得$\forall\ x\in H$，有

$$Px=\sum_{i=1}^{\infty}P_i x. \qquad ①$$

推论 设$\{L_n\}$是希尔伯特空间H中一列两两直交的闭线性子空间，则$P_{\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}L_i}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_{L_i}$.

上式右端级数是指算子的强收敛.

6. 定理6 设P_L,P_M是两个投影算子，则P_LP_M成为投影算子的充要条件是$P_LP_M=P_MP_L$，且在P_LP_M是投影算子时，它就是在$L\cap M$上的投影算子.

7. 定义4 设A和B是希尔伯特空间H上的有界自共轭算子，若$\forall\ x\in H$，有$(Ax,x)\leqslant(Bx,x)$成立，则称A小于或等于B，记做$A\leqslant B$或$B\geqslant A$.

定理7 设P_L,P_M是希尔伯特空间H中两个投影算子，则下列命题等价：

(1)$P_L\geqslant P_M$；　(2)$\|P_Lx\|\geqslant\|P_Mx\|$，$\forall\ x\in H$成立；

(3)$L\supset M$；　(4)$P_LP_M=P_M$；　(5)$P_MP_L=P_M$.

定义5 设L,M是H的两个闭线性子空间，且$L\supset M$，L中与M直交的向量全体称为M在L中的直交补，记做$L\ominus M$，即

$$L\ominus M=\{x \mid x\in L,\text{且 }x\perp M\}=L\cap M^{\perp}.$$

8. 定理8 设P_L,P_M是两个投影算子，则P_L-P_M是投影算子的充要条件是$L\supset M$. 当P_L-P_M是投影算子时，$P_L-P_M=P_{L\ominus M}$.

推论1 若P_L是由希尔伯特空间到它的闭线性子空间L上的

投影算子，则 $I-P_L$ 是在 $L^{\perp}$ 上的投影算子.

推论 2 若 P_L, P_M 是投影算子，则 P_LP_M 成为投影算子的充要条件是 $(L\ominus(L\cap M))\perp(M\ominus(L\cap M))$.

推论 3 若 P_L, P_M 是投影算子，且 $P_LP_M=P_MP_L$，则 $P_L+P_M-P_LP_M$ 是在 $(L\ominus(L\cap M))\oplus M$ 上的投影算子.

9. 定理 9 设 A 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，M 是 H 中的闭线性子空间，则 M 是 A 的不变子空间的充要条件是 $AP_M=P_MAP_M$.

定义 6 设 A 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，M 是 H 中的闭线性子空间，若 M 及 $M^{\perp}=H\ominus M$ 都是 A 的不变子空间，则称 M 是 A 的约化子空间，简称 M 约化 A.

推论 1 M 约化 A 的充要条件是：$AP_M=P_MA$.

推论 2 M 约化 A 的充要条件是：M 同时是 A 及 A^* 的不变子空间. 特别是当 A 是自共轭算子时，A 的不变子空间必定约化 A.

疑 难 解 析

投影与投影算子有什么不同?

答 投影是对一个向量而言的，也可以理解为一个向量的分解. 即若 M 是内积空间中的线性子空间，x 是 H 上的一个向量，如果有 $x_0\in M$，$x_1\perp M$，使得 $x=x_0+x_1$，则称 x_0 是 x 在 M 上的(直交)投影. 所以，对于内积空间 H 中的任意向量与任意线性子空间 M，x 在 M 上的投影不一定存在.

投影算子是一类较简单的有界线性算子，可以理解为一个映射. 它将希尔伯特空间 H 中的元 x 投影到 H 的闭子空间 L 上，是一个集合的分解. 因此，投影是指对一个向量的某种分解，而投影算子是指对某个集合的向量运算.

方法、技巧与典型例题分析

投影算子与投影算子的性质必须严格按照定义与定理来验

证，并利用算子与空间的特点讨论与投影算子相关的命题.

例 1 证明：投影算子 $P_L: H\to L$ 是有界线性算子，且当 $L\neq\{0\}$ 时，$\|P_L\|=1$.

证 $\forall\ x,y\in H$，有

$$x=x_1+x_2,\ y=y_1+y_2,\ x_1,y_1\in L,\ x_2,y_2\perp L,$$

故 $\quad x+y=(x_1+y_1)+(x_2+y_2),\ x_1+y_1\in L, x_2+y_2\perp L^{\perp},$

从而 $$P_L(x+y)=x_1+y_1=P_Lx+P_Ly.$$

类似可证 $P_L(\alpha x)=\alpha P_Lx,\ \forall\ \alpha\in K, x\in H$，

所以 P_L 是线性算子. 因为 $\forall\ x\in H,\ x=x_1+x_2$，有

$$\|P_Lx\|^2=\|x_1\|^2\leqslant\|x_1\|^2+\|x_2\|^2=\|x\|^2,$$

所以 $\|P_L\|\leqslant 1$. 又若取 $x_0\in L$，且 $\|x_0\|=1$，则

$$\|P_Lx_0\|=\|x_0\|=1.$$

又有 $\|P_L\|\geqslant 1$，从而 $\|P_L\|=1$.

例 2 集合 $\ker(P_L)=\{x\in H\mid P_Lx=0\}$ 称为 P_L 的零空间，$\mathrm{Ran}(P_L)$ 表示 P_L 的值域，设 $P_L: H\to H$ 是投影算子，证明：

(1) $\mathrm{Ran}(P_L)=L, \ker(P_L)=L^{\perp}, H=\mathrm{Ran}(P_L)\oplus\ker(P_L)$；

(2) $P_L|_L=I_L, P_L|_{L^{\perp}}=0$；

(3) $P_{L^{\perp}}=I-P_L$.

证 (1)因为 $P_L: H\to H$ 是投影算子，所以 $\mathrm{Ran}(P_L)\subseteq L$；反之，$\forall\ x\in L$，有 $P_Lx=x$，所以 $L\subseteq\mathrm{Ran}(P_L)$. 综合知 $\mathrm{Ran}(P_L)=L$.

因为 $\forall\ x\in\ker(P_L), x=x_1+x_2, x_1\in L, x_2\in L^{\perp}$，所以 $P_Lx=x_1$，而 $P_Lx=0$，即得 $x=x_2\in L^{\perp}$，于是 $\ker(P_L)\subset L^{\perp}$. 又显然有 $\ker(P_L)\supset L^{\perp}$. 综合知 $\ker(P_L)=L^{\perp}$，从而得出

$$H=L+L^{\perp}=\mathrm{Ran}(P_L)+\ker(P_L).$$

(2) $\forall\ x\in L, x=x+0, 0\in L^{\perp}$，故 $P_L(x)=x$，即 $P_L|_L=I_L$. 而 $\ker(P_L)=L^{\perp}$，故 $P_L|_{L^{\perp}}=0$.

(3)因为 $L^{\perp}$ 是闭子空间，所以 $P_{L^{\perp}}: H\to H$ 也是投影算子，有

$$Ix=x_1+x_2=P_Lx+P_{L^{\perp}}x,\ x_1\in L, x_2\in L^{\perp},$$

故 $$P_{L^\perp}x=(I-P_L)x,\ \forall\ x\in H,$$
从而 $$P_{L^\perp}=I-P_L.$$

例3 证明:投影算子是自共轭算子.

证 $\forall\ x,y\in H$,有

$$x=x_1+x_2,\ y=y_1+y_2,\ x_1,y_1\in L,\ x_2,y_2\in L^\perp.$$

所以 $$(Px,y)=(x_1,y_1)=(x,Py),$$
故知P为自共轭算子.

例4 证明:投影算子是幂等算子,即$P_L^2=P_L$.

证 $\forall\ x\in H$,有

$$x=x_1+x_2,\ x_1\in L,x_2\in L^\perp.$$

由$P_Lx=x_1\in L$,得

$$P_L^2x=P_Lx_1=x_1=P_Lx,$$

即$P_L^2=P_L$成立.

例5 证明:P是投影算子的充要条件是:P是自伴算子且$P^2=P$.

证 必要性证明见例3与例4.

充分性 设$L=\mathrm{Ran}(P)$,则$\forall\ y\in\mathrm{Ran}(P)$,存在$x\in H$,使得$y=Px$.于是

$$(I-P)y=(I-P)Px=Px-P^2x=0,$$

即$y\in\ker(I-P)$,从而$\mathrm{Ran}(P)\subset\ker(I-P)$.

$\forall\ y\in\ker(I-P)$,有$(I-P)y=0$,即$y=Py\in P(H)$. 于是$\ker(I-P)\subset\mathrm{Ran}(P)$.

综上得 $$\mathrm{Ran}(P)=\ker(I-P).$$
因为$(I-P)$是有界线性算子,所以$\ker(I-P)$是闭的,从而$L=\mathrm{Ran}(P)$是闭子空间.

同时,$\forall\ x\in H$,有$x=Px+(I-P)x$,且

$$((I-P)x,Py)=(P(I-P)x,y)=(0,y)=0,$$

所以 $$(I-P)x\in\mathrm{Ran}(P)^\perp,$$
而 $$Px\in\mathrm{Ran}(P)=L.$$

故 $P_L x = Px$，即 $P = P_L$.

例6 设 E 是希尔伯特空间 H 的线性子空间，记 $E^{\perp} = \{x \mid x \in H, x \perp E\}$，证明：

(1) $E^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间；

(2) 若 E 是闭的，则 $E^{\perp\perp} = E$；

(3) 若 E 是闭的，则 $H = E \oplus E^{\perp}$，即

$$H = E + E^{\perp}, \quad E \cap E^{\perp} = \{\theta\};$$

(4) 若 E 是闭的，$P: H \to E$ 是投影算子，则 $E^{\perp} = N(P)$.

证 (1) 设 $x, y \in E^{\perp}$，则 $\forall z \in E$，有 $x \perp z, y \perp z$，于是

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

故 $\alpha x + \beta y \in E^{\perp}$，从而知 $E^{\perp}$ 为线性子空间.

若 $x_n \in E^{\perp}$，$x_n \to x$，则 $\forall z \in E$，有 $(x_n, z) = 0$. 由内积关于变元的连续性可得

$$(x, z) = \lim_{n \to \infty}(x_n, z) = 0,$$

故 $x \perp z$，$x \in E^{\perp}$，$E^{\perp}$ 是闭线性子空间.

(2) 若 E 是闭的，则由 $E \perp E^{\perp}$ 可以得出，$E \subset E^{\perp\perp}$. 另一方面，若 $x \in E^{\perp\perp}$，则 $x \perp E^{\perp}$. 若 $x = x_1 + x_2$，$x_1 \in E$，$x_2 \perp E$，则 $x_2 \in E^{\perp}$，从而，$(x_1, x_2) = 0$. 于是

$$(x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_2) = (x, x_2) = 0,$$

即 $$x_2 = 0, \quad x = x_1 \in E, \quad E^{\perp\perp} \subset E.$$

综上得 $E = E^{\perp\perp}$.

(3) 若 E 是闭的，则由投影定理，$\forall x \in H$，有 $x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in E$，$x_2 \in E^{\perp}$，从而 $H = E + E^{\perp}$，同时 $E \cap E^{\perp} = \{\theta\}$，故 $H = E \oplus E^{\perp}$.

(4) 若 E 是闭的，则 $\forall x \in H$，$x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in E$，$x_2 \perp E$. 当且仅当 $x_1 = 0$ 时，$x \in E^{\perp}$，即 $Px = 0$ 或 $x \in N(P)$，即 $E^{\perp} = N(P)$.

例7 设 P 是从希尔伯特空间 H 到其闭线性子空间的线性算子，证明下列命题等价：

(1)P 是投影算子；

(2)$P^2=P$，且 P 是自共轭算子；

(3)$P^2=P$，且 $N(P)\perp R(P)$；

(4)若 H 是复空间，则还等价于

$$(Px,x)=\|Px\|^2,\quad x\in H.$$

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 由题设，P 为从 H 到 E 的投影算子，则 $\forall\ x\in H$，$Px\in E$，故

$$P^2x=P(Px)=Px\Longrightarrow P^2=P.$$

$\forall\ x,y\in H$，有

$$x=x_1+x_2,\quad y=y_1+y_2,\quad x_1,y_1\in E,\quad x_2,y_2\perp E,$$

则
$$\begin{aligned}(Px,y)&=(x_1,y_1+y_2)=(x_1,y_1)\\&=(x_1+x_2,y_2)=(x,Py),\end{aligned}$$

所以，P 是自共轭的.

(2)$\Longrightarrow$(3). $\forall\ x\in N(P)$，有 $Px=0$；$\forall\ y\in R(P)$，有 $x_1\in H$，$y=Px_1$. 于是

$$(x,y)=(x,Px_1)=(Px,x_1)=0,$$

即
$$N(P)\perp R(P).$$

(3)$\Longrightarrow$(1). 令 $E=N(I-P)$ 为 H 的闭线性子空间. 验证 P 是从 H 到 E 上的投影算子.

因为 $\forall\ y\in R(P)$，$\exists\ x\in H$，使得 $y=Px=P^2x$，所以 $(I-P)Px=0$，即 $(I-P)y=0$，$y\in N(I-P)$. 反之，$\forall\ y\in N(I-R)$，有 $(I-P)y=0$，$y=Py\in R(P)$，所以 $R(P)=N(I-P)$，即 $E=R(P)$.

$\forall\ x\in H$，记 $x=Px+(x-Px)$，则显然有

$$Px\in R(P)=E.$$

又
$$P(I-P)x=P(x-Px)=0,$$

从而
$$x-Px\in N(P).$$

由于 $N(P)\perp R(P)$，故

$$x-Px\perp R(P)=E.$$

所以 P 是从 H 到 E 的投影算子.

考虑 H 是复希尔伯特空间情形.

(2)⟹(4),即

$$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x).$$

(4)⟹(2). 对于 H 上任一线性算子,极化恒等式成立,即

$$4(Ax,y)=(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)$$
$$+\mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y).$$

若 $\forall\ x\in H$,有 $(Px,x)=\|Px\|^2$,则 (Px,x) 为实数. 令 $A=P$,可得

$$(Px,y)=\overline{(Py,x)}=(x,Py),$$

P 是自共轭的,于是

$$(P^2x,x)=(Px,Px)=(Px,x),\quad x\in H.$$

令 $A=P^2-P$,则 $(Ax,x)=0,x\in H$. 利用极化恒等式可得

$$(Ax,y)=0,\quad x,y\in H.$$

从而 $A=0$,即 $P^2=P$,P 是幂等的.

例8 设 P_E,P_M 分别为希尔伯特空间 H 到其闭线性子空间 E 和 M 的投影算子,证明以下命题等价:

(1) $P_E\geqslant P_M$; (2) $\|P_Ex\|\geqslant\|P_Mx\|,x\in H$;

(3) $E\supset M$; (4) $P_EP_M=P_MP_E=P_M$;

(5) P_E-P_M 为投影算子.

证 (1)⟹(2).

$$\|P_Ex\|^2=(P_Ex,x)\geqslant(P_Mx,x)=\|P_Mx\|^2,$$

故
$$\|P_Ex\|\geqslant\|P_Mx\|,\quad x\in H.$$

(2)⟹(3). 若 $x\in M$,则 $P_Mx=x$,从而

$$\|P_Ex\|^2\geqslant\|P_Mx\|^2=\|x\|^2=\|P_Ex\|^2+\|x-P_Ex\|^2,$$

故
$$x-P_Ex=0\quad 或\quad P_Ex=x,$$

即 $x\in E$,从而可推断出 $M\subset E$.

(3)⟹(4). $\forall\ x\in H$,有 $P_Mx\in M\subset E$,故

$$P_EP_Mx=P_Mx\quad 或\quad P_EP_M=P_M.$$

但另一方面，设 $x=P_Ex+x_2$，$x_2\perp E$，从而 $x_2\perp M$；又设 $x=P_Mx+x_2'$，$x_2'\perp M$，故

$$(x_2-x_2')\perp M,$$

$$P_Ex-P_Mx=-(x_2-x_2')\perp M.$$

若记 $P_Ex=P_Mx+(P_Ex-P_Mx)$，则此式成为 P_Ex 关于 M 的投影分解式，从而

$$P_MP_Ex=P_Mx \quad 或 \quad P_MP_E=P_M.$$

(4)$\Longrightarrow$(5). 因为命题(4)成立，则

$$\begin{aligned}(P_E-P_M)^2&=P_E^2-P_EP_M-P_MP_E+P_M^2\\&=P_E-P_M-P_M+P_M=P_E-P_M,\end{aligned}$$

所以 P_E-P_M 是幂等的.

又由 P_E,P_M 的自共轭性，$\forall\ x,y\in H$，有

$$\begin{aligned}((P_E-P_M)x,y)&=(P_Ex,y)-(P_Mx,y)\\&=(x,P_Ey)-(x,P_My)=(x,(P_E-P_M)y),\end{aligned}$$

即 P_E-P_M 是自共轭的，故 P_E-P_M 是投影算子.

例 9 设 P_E,P_M 是希尔伯特空间 H 中的投影算子，证明以下命题等价：

(1) $E\perp M$；

(2) $R(P_E)\perp R(P_M)$；

(3) $P_EP_M=0$（称 P_E 与 P_M 正交）；

(4) P_E+P_M 为投影算子.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 由 $R(P_E)=E$，$R(P_M)=M$，即得 $R(P_E)\perp R(P_M)$.

(2)$\Longrightarrow$(3). $\forall\ x,y\in H$，有

$$(x,P_EP_My)=(P_Ex,P_My)=0,$$

于是 $P_EP_My=0$，从而 $P_EP_M=0$.

(3)$\Longrightarrow$(4). $\forall\ x\in H$，由 $P_EP_M=0$，得到 $P_EP_MP_Ex=0$，于是

$$\|P_MP_Ex\|^2=(P_MP_Ex,P_MP_Ex)=(P_Ex,P_M^2P_Ex)$$

$$=(P_Ex,P_MP_Ex)=(x,P_EP_MP_Ex)=0,$$

所以 $$P_MP_E=0.$$

由于

$$(P_E+P_M)^2=P_E^2+P_MP_E+P_EP_M+P_M^2=P_E+P_M,$$

又$\forall\ x,y\in H$,有

$$\begin{aligned}((P_E+P_M)x,y)&=(P_Ex,y)+(P_Mx,y)\\&=(x,P_Ey)+(x,P_My)=(x,(P_E+P_M)y),\end{aligned}$$

从而知P_E+P_M为投影算子.

(4)$\Longrightarrow$(1). 由

$$\begin{aligned}P_E+P_M&=(P_E+P_M)^2=P_E^2+P_EP_M+P_MP_E+P_M^2\\&=P_E+P_EP_M+P_MP_E+P_M,\end{aligned}$$

可知 $$P_EP_M+P_MP_E=0. \qquad ①$$

式①左乘P_E,得 $$P_EP_M+P_EP_MP_E=0,$$

式①右乘P_E,得 $$P_EP_MP_E+P_MP_E=0,$$

于是$P_EP_M=P_MP_E$. 综合式①知

$$P_EP_M=P_MP_E=0.$$

$\forall\ x\in M$,有$P_Mx=x$,故

$$0=P_EP_Mx=P_Ex\Longrightarrow x\perp E,$$

所以 $$M\perp E.$$

例10 设H为希尔伯特空间,证明:

(1)若$\{Q_i\}$是一列两两正交($Q_iQ_j=0,i\neq j$)的投影算子,则存在投影算子P,使得$\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i\to P\quad(n\to\infty)$点点成立.

(2)若$\{E_i\}$是一列单调增加($E_i\subset E_{i+1},\ i\geqslant 1$)的闭线性子空间,且$E=\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}$,则$P_{E_n}\to P_E\quad(n\to\infty)$点点成立.

证 (1)记$P_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i$,依例9,用数学归纳法可证$P_n$是投影算子,又由正交性

$$(Q_i x, Q_j x) = (Q_j Q_i x, x) = 0,\quad i \neq j,$$

有
$$\|x\|^2 \geqslant \|P_n x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i x, \sum_{i=1}^{n} Q_j x\right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (Q_i x, Q_j x) = \sum_{i=1}^{n} \|Q_i x\|^2,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i x\|^2 < \infty.$$

又
$$\left\|\sum_{i=n+1}^{m} Q_i x\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \|Q_i x\|^2 \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i x$ 是柯西序列，H 是完备的，令

$$Px = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q_i x,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \to P$. 由于

$$\|Px\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} Q_i x\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (Q_i x, x) = (Px, x),$$

所以，P 是投影算子.

(2)由例 9，$P_{E_{i+1}} - P_{E_i}$是投影算子($i \geqslant 1$)，且
$$P_{E_i} P_{E_j} = P_{E_i} (i < j),$$

故
$$(P_{E_{i+1}} - P_{E_i})(P_{E_{j+1}} - P_{E_j}) = P_{E_{i+1}} - P_{E_{i+1}} + P_{E_i} - P_{E_i} = 0,$$
$$P_{E_1}(P_{E_{i+1}} - P_{E_i}) = P_{E_1} - P_{E_1} = 0,$$

于是，$P_{E_1}, P_{E_2} - P_{E_1}, P_{E_3} - P_{E_2}, \cdots$ 是一列两两正交的投影算子序列. 则由题(1)，$\forall\ x \in H$，有

$$P_{E_n} x = P_{E_1} x + \sum_{i=1}^{n-1} (P_{E_{i+1}} - P_{E_i}) x \to Px,$$

即 P 为投影算子.

记 $P = P_L$，需证明 $L = E$.

因为$\forall\ n \geqslant 1$，有 $E_n \subset E$，故由例 8 知，$\forall\ x \in H$，有 $\|P_{E_n} x\| \leqslant \|P_E x\|$. 令 $n \to \infty$，则

$$\| P_L x \| = \lim_{n\to\infty} \| P_{E_n} x \| \leqslant \| P_E x \|,$$

于是，$L \subset E$.

又$\forall\ x \subset E_n$，当$k \geqslant n$时，$x \in E_k$，故$P_{E_k}x = x$. 令$k \to \infty$，则

$$P_L x = \lim_{k\to\infty} P_{E_k} x = x \Rightarrow x \in L \Rightarrow E_n \subset L.$$

由n的任意性与E_n单调增加性知，$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset L$和$L$闭，所以

$$E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \subset L.$$

综上即知$L = E$，也就是$P = P_L = P_E$.

第六节　谱系、谱测度和谱积分

主 要 内 容

1. 定义 1　设H为希尔伯特空间，$\{T_\lambda \mid -\infty < \lambda < \infty\}$是一族投影算子，满足：

(1)单调性　对任何两个实数λ, μ，若$\lambda \geqslant \mu$，则$T_\lambda \geqslant T_\mu$，

(2)右连续性　$\forall\ \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$，$\lim_{\lambda\to\lambda_0^+} T_\lambda x = T_{\lambda_0} x$，

(3)(强)$\lim_{\lambda\to-\infty} T_\lambda = 0$，(强)$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda = I$，

则称$\{T_\lambda\}$是一个**谱系**.

2. 定理 1　设$\{T_\lambda \mid -\infty < \lambda < \infty\}$是希尔伯特空间$H$中的一族投影算子，满足：

(1)单调性　当$\lambda \geqslant \mu$时，$T_\lambda \geqslant T_\mu$，

(2)对一切$\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$，$T_{\lambda_0} =$(弱)$\lim_{\lambda\to\lambda_0^+} T_\lambda$，

(3)(弱)$\lim_{\lambda\to-\infty} T_\lambda = 0$，(弱)$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda = I$，

则$\{T_\lambda\}$是一个谱系.

定理 2　设$\{T_\lambda \mid -\infty < \lambda < \infty\}$是希尔伯特空间上的一族投影算子，则$\{T_\lambda\}$成为谱系的充要条件是$\forall\ x \in H$，函数$T_x(\lambda) =$

$(T_\lambda x, x)$满足：

(1)T_x 单调不减，即当 $\lambda \geqslant \mu$ 时，$T_x\lambda \geqslant T_x\mu$；

(2)T_λ 右连续，即对任一 $\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$，$T_{\lambda_0^+} = T_{\lambda_0}$；

(3) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} T_x(\lambda) = 0$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty} T_x(\lambda) = \|x\|^2$.

若$\{T_\lambda\}$是谱系，且存在有限数 m, M，使得当 $\lambda < m$ 时，$T_\lambda = 0$，当 $\lambda \geqslant M$ 时，$T_\lambda = I$，则称$\{T_\lambda\}$是区间$[m, M]$上的谱系.

3. 定义 2 设 X 是一个集，R 是 X 的某些子集所组成的代数，E 是 $R \to P$ 的映射，若满足：

(1)$E(X) = I$，

(2)可列可加性 如果$\{A_n\}$是 R 中一列互不相交的元，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in R$，则有 $E(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E(A_n)$，

则称 E 是(X, R)上(H 中)的**谱测度**. 当 R 是 σ-代数时，称(X, R, E)是 H 中的**谱测度空间**.

4. 定理 3 设 E 是(X, R)上的谱测度，则

(1)$E(\varnothing) = 0$；

(2)有限可加性 对 $A_i \ (i = 1, 2, \cdots, n) \in R$，且$\{A_i\}$两两不交，有 $E(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(A_i)$；

(3)若 $A, B \in R$，且 $A \cap B = \varnothing$，则 $E(A)E(B) = E(B)E(A) = 0$；

(4)$\forall\ A, B \in R$，有 $E(A \cup B) = E(A) + E(B) - E(A \cap B)$；

(5)$\{E(A) \mid A \in R\}$是交换算子族.

5. 定义 3 设(X, R, E)是谱测度空间，f 是(X, R)上的可测函数，如果存在希尔伯特空间 H 上的有界线性算子(记为 $\int f(t) \mathrm{d}E(t)$)，使得 $\forall\ x, y \in H$，有

$$\left(\int f(t) \mathrm{d}E(t) x, y\right) = \int f(t) \mathrm{d}(E(t) x, y)$$

成立，则称$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$为函数f关于谱测度E的(弱)谱积分.

定理 4　设(X,R,E)是谱测度空间，$f\in B(X,R)$，则谱积分$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$惟一地存在，且有以下性质.

(1)线性性　$\forall\ f,g\in B(X,R)$及数α,β，有

$$\int(\alpha f+\beta g)(t)\mathrm{d}E(t)=\alpha\int f(t)\mathrm{d}E(t)+\beta\int g(t)\mathrm{d}E(t);$$

(2)埃尔米特(Hermite)性　当$f\in B(X,R)$时，有

$$\left[\int f(t)\mathrm{d}E(t)\right]^*=\int\overline{f(t)}\mathrm{d}E(t),$$

特别当f是实值函数时，$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$是自共轭算子；

(3)压缩性　当$f\in B(X,R)$时，$\left\|\int f(t)\mathrm{d}E(t)\right\|<\|f\|$；

(4)若$A\in R$，χ_A是集A的特征函数，则$\int\chi_A(t)\mathrm{d}E(t)=E(A)$.

6. 定义 4　设(X,R,E)是谱测度空间，$f\in B(X,R)$，f的值域在(m,M)中，对于分点组D:$m=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=M$，作和式

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n}\xi_iE(X(y_{i-1}\leqslant f<y_i)),\quad y_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant y_i,$$

记$\delta(D)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})$. 如果存在$H$中的线性有界算子$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$，使得$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当分点组$D$满足$\delta(D)<\delta$时，不论$\xi_i\in[y_{i-1},y_i]$如何取值，总有

$$\left\|\int f(t)\mathrm{d}E(t)-S(D)\right\|<\varepsilon,$$

则称$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$是函数f关于谱测度E的**一致谱积分**.

定理5　设(X,R,E)是谱测度空间，$f\in B(X,R)$是实值函数，则f关于E的弱谱积分就是一致谱积分.

推论1　$\forall\ f\in B(X,R)$，$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$与所有的$E(A)$，$A\in R$可

交换. $\forall f,g\in B(X,R)$，$\int f(t)\mathrm{d}E(t)$和$\int g(t)\mathrm{d}E(t)$可交换.

推论2 $\forall f,g\in B(X,R)$，有下式成立

$$\int f(t)g(t)\mathrm{d}E(t)=\int f(t)\mathrm{d}E(t)\int g(t)\mathrm{d}E(t),$$

$$\left(\int f(t)\mathrm{d}E(t)x,\int g(t)\mathrm{d}E(t)y\right)=\int f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}(E(t)x,y).$$

7. 定义5 设$\{T_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是谱系，而$E$是$\boldsymbol{B}_0$上的谱测度，若

$$T_\lambda=E((-\infty,\lambda]),\ \lambda\in(-\infty,\infty),$$

则称$E(\cdot)$是由$\{T_\lambda\}$导出的**谱测度**.

定理6 设$\{T_\lambda\}$是谱系，则它必定在B_0上导出惟一的谱测度.

定理7 设E是(X,R)上的谱测度，又设$S(R)$是包含R的最小σ-代数，则必惟一地有$(X,S(R))$上的谱测度E^*，使得当$A\in R$时，$E^*(A)=E(A)$.

定理8 设$\{T_\lambda|-\infty<\lambda<\infty\}$是$H$中的谱系，$E$是由$\{T_\lambda\}$导出的$(\mathbf{R}^1,B)$上的谱测度，任取$\mathbf{R}^1$中的非空开集$O$，设它的构成的区间全体是$\{(a_i,b_i)\}$，则

$$E(O)=\sum_i(T_{b_i-}-T_{a_i}),$$

其中

$$T_{b_i-}=(\text{强})\lim_{\lambda<b_i,\lambda\to b_i}T_\lambda.$$

疑难解析

1. 定义1与定理1有何不同?

答 定义1给出了一族投影算子$\{T_\lambda\}$在什么条件下是一个谱系，而定理1则给出实际上当$\{T_\lambda\}$满足哪些条件时就是一个谱系. 从形式上看，两者似乎差不多，但事实上定理1的条件要弱得多，也就是满足定理1的条件时必然满足定义1，因为，由

$$(\text{弱})\lim_{\lambda\to\lambda_0^+}T_\lambda=T_{\lambda_0},$$

有 $$\lim_{\lambda\to\lambda_0^+}((T_\lambda-T_{\lambda_0})x,x)=0.$$

但当 $\lambda>\lambda_0$ 时，$T_\lambda-T_{\lambda_0}$ 是投影算子，故

$$\|(T_\lambda-T_{\lambda_0})x\|^2=((T_\lambda-T_{\lambda_0})x,x),$$

从而弱收敛等价于强收敛，即由定理 1 的条件(2)可以得到定义 1 的条件(2). 类似地，定义 1 的条件(3)也可由定理 1 的条件(3)得出.

2. 怎样由谱系 $\{T_\lambda\}$，在 B_0 上导出惟一的谱测度?

答 (1)对于 $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$，作 $E((a,b])=T_b-T_a$，式中 $T_{-\infty}$，T_∞ 分别理解为 0 和 I.

(2)$\forall\ \Delta\in B_0$，若 $\Delta=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$ 且 $(a_i,b_i]$，$i=1,2,\cdots,n$ 两两不相交，则令

$$E(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(T_{b_i}-T_{a_i}).$$

(3)$E((-\infty,\lambda])=E_\lambda$，$E$ 即为 $(\mathbf{R}^1,B_0)$ 上谱测度.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $\{T_\lambda\}$ 为谱系，证明：

(1)若 $\lambda\leqslant\mu$，则 $T_\lambda T_\mu=T_\mu T_\lambda=T_\lambda$；

(2)设 $\Delta=(\alpha,\beta]$，$T_\Delta=T_\beta-T_\alpha$，则 T_Δ 为投影算子；

(3)若 Δ_1,Δ_2 是(2)中的半开区间，且 $\Delta_1\cap\Delta_2=\Delta$，则 $T_{\Delta_1}T_{\Delta_2}=T_\Delta$；

(4)$\lim_{\lambda\to\lambda_0^-}T_\lambda x(\forall\ x\in H)$ 存在，且其极限为投影算子；

(5)$\forall\ x,y\in H$，$\alpha_{x,y}(\lambda)=(T_\lambda x,y)$ 是 λ 的有界变差函数.

证 (1)，(2)可由投影算子定理 7 直接得出.

(3)若 $\Delta_1=(\alpha_1,\beta_1]$，$\Delta_2=(\alpha_2,\beta_2]$，$\Delta_1\cap\Delta_2=(\alpha_1,\beta_2]$(其它情形类似可证)，则 $\alpha_2\leqslant\alpha_1<\beta_2\leqslant\beta_1$. 由计算得

$$T_{\Delta_1}T_{\Delta_2}=(T_{\beta_1}-T_{\alpha_1})(T_{\beta_2}-T_{\alpha_2})$$

$$=T_{\beta_1}T_{\beta_2}-T_{\alpha_1}T_{\beta_2}-T_{\beta_1}T_{\alpha_2}+T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$$
$$=T_{\beta_2}-T_{\alpha_1}-T_{\alpha_2}+T_{\alpha_2}=T_{\beta_2}-T_{\alpha_1}=T_{\Delta},$$

所以T_{Δ}为投影算子.

(4)任取一单调序列$\{\lambda_n\}$,$\lambda_n<\lambda_{n+1}$,$\lambda_n\to\lambda_0$. 由题(2)知,$T_{\lambda_{n+1}}-T_{\lambda_n}$是投影算子. 由题(3)知,当$m\neq n$时,$(T_{\lambda_{m+1}}-T_{\lambda_m})$与$(T_{\lambda_{n+1}}-T_{\lambda_n})$正交. 由投影算子(第五节例10)性质知,$\lim\limits_{n\to\infty}\left[T_{\lambda_1}+\sum\limits_{i=2}^{n}(T_{\lambda_i}-T_{\lambda_{i-1}})\right]$存在,即$\lim\limits_{n\to\infty}T_{\lambda_n}x$存在. 由$\{\lambda_n\}$的任意性,故$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0^-}T_{\lambda}x$存在,其极限为投影算子.

(5)任取分点$a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b$,记

$$\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1}],\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

则$T_{\Delta_k}=T_{\lambda_{k+1}}-T_{\lambda_k}$为投影算子,$T_{\Delta_k}T_{\Delta_l}=0(l\neq k)$. 从而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|T_{\Delta_k}x\|^2=\left\|\sum_{k=0}^{n-1}T_{\Delta_k}x\right\|^2=\|x\|^2,$$

故
$$\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\lambda_{k+1}}x,y)-(T_{\lambda_k}x,y)|$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\Delta_k}x,y)|=\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\Delta_k}^2x,y)|$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\Delta_k}x,T_{\Delta_k}y)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\|T_{\Delta_k}x\|\,\|T_{\Delta_k}y\|$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n-1}\|T_{\Delta_k}x\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\|T_{\Delta_k}y\|^2\right)^{1/2}\leqslant\|x\|\,\|y\|,$$

所以
$$\bigvee_a^b(\alpha_{xy})\leqslant\|x\|\,\|y\|.$$

例 2 设H为希尔伯特空间,$\{P_i\}$是一列两两正交的投影算子,$\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i=I$,证明:对于任一列实数$\{\lambda_i\}$,$a<\lambda_i\leqslant b$,令

$$T_\lambda=\begin{cases}0, & \lambda\leqslant a,\\ \sum\limits_{\lambda_i\leqslant\lambda}P_i, & \lambda>a,\end{cases}$$

则$\{T_\lambda\}$为一谱系.

证 因为T_λ实际上是有限多个或可列多个两两正交的投影算子之和. 由第五节例9、例10知,T_λ是投影算子,且当$\lambda\leqslant\mu$时,有

$$T_\mu - T_\lambda = \sum_{\lambda<\lambda_i\leqslant\mu} P_i \geqslant 0,$$

故$\{T_\lambda\}$单调增加.

若$\lambda>\lambda_0$,则

$$T_\lambda - T_{\lambda_0} = \sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda} P_i,\quad x\in H,$$

且
$$\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda} P_i x\right\|^2 = \sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda} \|P_i x\|^2 \leqslant \sum_{i=m_\lambda}^{\infty} \|P_i x\|^2,$$

其中
$$m_\lambda = \inf\{i, \lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda\}.$$

显然,当$\lambda\to\lambda_0^+$时,$m_\lambda\to\infty$. 由于级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|P_i x\|^2\leqslant\|x\|^2$收敛,故

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0^+}\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda} P_i x\right\| = 0,$$

即
$$\lim_{\lambda\to\lambda_0^+}\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda} P_i x = 0,\quad \lim_{\lambda\to\lambda_0^+} T_\lambda x = T_{\lambda_0} x,\quad x\in H.$$

于是,$\{T_\lambda\}$是右连续的.

由T_λ的定义知,$T_a=0$,$T_b=I$,故$\{T_\lambda\}$为谱系.

例3 在希尔伯特空间$L^2[0,1]$中,对实数λ,记$(-\infty,\lambda]$上的特征函数$\chi_{(-\infty,\lambda]}(t)$为$e_\lambda(t)$,作算子$T_\lambda$如下:

$$T_\lambda f = e_\lambda(t) f(t),\quad f\in L^2[0,1],$$

证明$\{T_\lambda\}$是谱系.

证 因为$e_\lambda(t)$是有界实值函数,且$e_\lambda^2(t)=e_\lambda(t)$,所以$T_\lambda$是幂等的自共轭算子,即$T_\lambda$是投影算子.

当$\lambda\geqslant\mu$时,有

$$e_\lambda(t)e_\mu(t) = e_\mu(t)e_\lambda(t) = e_\mu(t),$$

所以$T_\lambda T_\mu = T_\mu T_\lambda = T_\mu$,由第五节定理7,$T_\lambda\geqslant T_\mu$.

当 $\lambda\leqslant 0$ 时，$T_\lambda=0$；当 $\lambda\geqslant 1$ 时，$T_\lambda=I$.

$\forall\ f(t)\in L^2[0,1]$，由勒贝格控制收敛定理，有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^1|e_\lambda(t)-e_{\lambda_0}(t)|^2|f(t)|^2\mathrm{d}t=0,$$

即 $(T_\lambda-T_{\lambda_0})f$ 收敛于零 $(\lambda\to\lambda_0)$，所以 T_λ 是强连续的.

综上知，$\{T_\lambda\}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的谱系.

例 4 设 $f,g\in C[a,b]$，$\alpha,\beta\in\Phi$，证明：

(1) $\left\|\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right\|\leqslant\|f\|$，其中 $\|f\|=\sup\limits_{a\leqslant\lambda\leqslant b}|f(\lambda)|$；

(2) $\int_a^b[f(\lambda)+g(\lambda)]\mathrm{d}T_\lambda=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda+\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$；

(3) 若 $\|f_n-f\|\to 0\quad(n\to\infty)$，则 $B(H)$ 上的范数

$$\int_a^b f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\to\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\quad(n\to\infty);$$

(4) $\int_a^b\alpha f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\alpha\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$；

(5) $\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right)^*=\int_a^b\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda$；

(6) 对于每个 $(\alpha,\beta]$，$\int_\alpha^\beta\mathrm{d}T_\lambda=T_\beta-T_\alpha$；

(7) $\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$，且右端两个积分可交换.

证 (1) 设 $T=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$，则 $\forall\ x,y\in H$，有

$$(Tx,y)=\varphi(x,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y).$$

由希尔伯特空间性质及例 1 题(5)，有

$$\begin{aligned}\|T\|=\|\varphi\|&=\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}|\varphi(x,y)|\\&=\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}\left|\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y)\right|\\&\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}\bigvee_a^b(\alpha_{xy})\|f\|\ \|y\|.\end{aligned}$$

(2)设$S=\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$，则$\forall\ x,y\in H$，有

$$
\begin{aligned}
((T+S)x,y)&=(Tx,y)+(Sx,y)\\
&=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y)+\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y)\\
&=\int_a^b[f(\lambda)+g(\lambda)]\mathrm{d}(T_\lambda x,y),
\end{aligned}
$$

故 $$T+S=\int_a^b[f(\lambda)+g(\lambda)]\mathrm{d}T_\lambda.$$

(3)由题(1)、题(2)可得

$$\left\|\int_a^b f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda-\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right\|\leqslant\|f_n-f\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

(4)因为$\forall\ x,y\in H$，有

$$\int_a^b\alpha f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y)=\alpha\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y),$$

所以 $$\int_a^b\alpha f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\alpha\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda.$$

(5)$\forall\ x,y\in H$，由$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$的定义，得

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right)x,y\right)}&=\overline{\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y)}=\int_a^b\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}\,\overline{(T_\lambda x,y)}\\
&=\int_a^b\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}(T_\lambda y,x)=\left(\int_a^b\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda y,x\right)\\
&=\overline{\left(x,\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda y\right)},
\end{aligned}
$$

从而 $$\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right)^*=\int_a^b\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda.$$

(6)$\forall\ x,y\in H$，由$(T_\lambda x,x)$的单调性与右连续，有

$$
\begin{aligned}
\left(\int_a^b\mathrm{d}T_\lambda x,x\right)&=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}(T_\lambda x,x)=(T_\beta x,x)-(T_\alpha x,x)\\
&=((T_\beta-T_\alpha)x,x),
\end{aligned}
$$

其中$f(\lambda)=1$为实函数，故$\int_a^b\mathrm{d}T_\lambda$为自共轭的，$\int_\alpha^\beta\mathrm{d}T_\lambda=(T_\beta-T_\alpha)$也是自共轭的. 从而有

$$\int_\alpha^\beta dT_\lambda = T_\beta - T_\alpha.$$

(7)由广义测度积分的性质得到谱积分关于区域的可加性. 若 $f(\lambda),g(\lambda)$ 为阶梯函数,例如

$$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{\Delta_i}, \quad \Delta_i=(\alpha_i,\alpha_{i+1}],$$

$$a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n=b,$$

$$g(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1} b_j \chi_{\Delta_j'}, \quad \Delta_j'=(\beta_j,\beta_{j+1}],$$

$$a=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_n=b.$$

记 $\Delta_{ij}=\Delta_i\cap\Delta_j'$,则由题(6),有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)dT_\lambda &= \sum_{i,j}\int_{\Delta_{ij}} f(\lambda)g(\lambda)dT_\lambda = \sum_{i,j} a_i b_j \int_{\Delta_{ij}} dT_\lambda \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j T_{\Delta_{ij}} = \sum_{i,j} a_i b_j T_{\Delta_i} T_{\Delta_j'} \\ &= \Big(\sum_i a_i T_{\Delta_i}\Big)\Big(\sum_j b_j T_{\Delta_j}\Big) \\ &= \int_a^b f(\lambda)dT_\lambda \int_a^b g(\lambda)dT_\lambda.\end{aligned}$$

类似地,由 $T_{\Delta_i}T_{\Delta_j}=T_{\Delta_j}T_{\Delta_i}$,又可得

$$\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)dT_\lambda=\int_a^b g(\lambda)dT_\lambda\int_a^b f(\lambda)dT_\lambda.$$

$\forall\ f,g\in C[a,b]$,取阶梯函数列 f_n,g_n,使得

$$\| f_n-f\|\to 0 \ \ (n\to\infty), \quad \| g_m-g\|\to 0 \ \ (m\to\infty),$$

可以设

$$\| f_n\|\leqslant M, \quad \| g_m\|\leqslant M,$$

则有 $\quad \| f_n g_m - fg\| \leqslant M\| f_n-f\|$

$$+M\| g_m-g\|\to 0 \ \ (m,n\to\infty).$$

对式 $\qquad \displaystyle\int_a^b f_n(\lambda)g_m(\lambda)dT_\lambda=\int_a^b f_n(\lambda)dT_\lambda\int_a^b g_m(\lambda)dT_\lambda$

两端取极限,则由题(3)知

$$\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda = \lim_{m,n\to\infty}\int_a^b f_n(\lambda)g_m(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda \lim_{m\to\infty}\int_a^b g_m(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$$
$$=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda.$$

由阶梯函数情形的可交换性知，等式右端两积分是可交换的.

第七节　酉算子的谱分解定理

主 要 内 容

1. **定义**　若$U\in B(H)$是满射，且满足

$$(Ux,Uy)=(x,y),\ \ x,y\in H,$$

则称U是H上的**酉算子**(**或酉变换**).

定理1　设H,G是希尔伯特空间，则H到G中的线性有界算子U成为酉算子的充要条件是$U^*U=I_H$，且$UU^*=I_G$. 其中I_H,I_G分别表示H及G中的恒等算子.

定理2　设(X,R,E)是希尔伯特空间H中的谱测度空间，函数$f\in B(X,R)$，且$\|f\|\equiv 1$，则谱积分$U=\int f\mathrm{d}E$是酉算子.

2. **定理3**　设$P(\mathrm{e}^{it})=\sum\limits_{-N}^{N}C_v\mathrm{e}^{ivt}$是一个三角多项式，且对任何实数$t$，$P(\mathrm{e}^{it})>0$，则必有三角多项式$Q(\mathrm{e}^{it})=\sum\limits_{v=0}^{m}\alpha_v\mathrm{e}^{vit}$，使得

$$P(\mathrm{e}^{it})=|Q(\mathrm{e}^{it})|^2.$$

定理4(酉算子的谱分解定理)　设U是复希尔伯特空间H到它自身上的酉算子，则必有H中谱系$\{T_\theta|\theta\in[0,2\pi]\}$满足$T_0=0$，并使$U=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}T_\theta$. $\{T_\theta\}$为酉算子的谱系.

推论1　若复数ξ使$|\xi|\neq 1$，则ξ是酉算子的正则点.

推论 2 数 $e^{i\theta_0}$ $(0<\theta_0<2\pi)$是酉算子 U 正则点的充要条件是有正数 δ，使得 U 的谱系 $\{T_\theta\}$ 在 $[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta]$ 中是常算子. 1 为 U 的正则点的充要条件是有正数 δ，使得当 $\theta\in(0,\delta)$ 时，$T_\theta=0$，当 $\theta\in(2\pi-\delta,2\pi)$ 时，$T_\theta=I$.

推论 3 数 $e^{i\theta_0}$ $(0<\theta_0\leqslant 2\pi)$是酉算子 U 的特征值的充要条件是 $T_{\theta_0}\neq T_{\theta_0^-}$.

推论 4 设 U 是复希尔伯特空间中的酉算子，$\{T_\theta|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 是 U 的谱系，设 $\{[0,2\pi],B\cap[0,2\pi]\}$，$E$ 是谱测度空间，T 是由谱系 $\{T_\theta\}$ 决定的谱测度，则对于任何与 U 可交换的有界线性算子 A，T_θ 以及 $E(M)(M\in B\cap[0,2\pi])$ 都与 A 可交换.

3. 定理 5(酉算子的谱分解定理 2) 设 U 是复希尔伯特空间 H 中酉算子，则必有 $(\sigma(U),B_{\sigma(U)})$ 上惟一的谱测度 F，使得

$$U=\int_{\sigma(U)}\lambda\mathrm{d}F(\lambda),$$

且 F 具有性质：$\forall\ M\in B_{\sigma(U)}$ 及 H 中任一可与 U 交换的有界线性算子 A，$F(M)$ 与 A 是可交换的.

4. 定义 2 设 A 是希尔伯特空间 H 上的一个线性算子. 若存在 $\mathscr{B}(\sigma(A),B_{\sigma(A)})\to B(H\to H)$ 的映射 $f\mapsto f(A)$ 满足：

(1)线性性 当 α,β 为复数，$f,g\in\mathscr{B}(\sigma(A),B_{\sigma(A)})$ 时，有

$$(\alpha f+\beta g)(A)=\alpha f(A)+\beta g(A),$$

(2)可乘性 当 $f,g\in\mathscr{B}(\sigma(A),B_{\sigma(A)})$ 时，

$$(fg)(A)=f(A)g(A),$$

(3)当 $f\equiv 1$ 时，$f(A)=I$，

(4)当 $f(\lambda)\equiv\lambda$ 时，$f(A)=A$，

则称 $f\mapsto f(A)$ 是**算子演算**.

$B_{\sigma(A)}$ 表示复平面上含在 $\sigma(A)$ 中的波雷尔(Borel)集全体.

定理 6 设 U 是复希尔伯特空间 H 中的酉算子，$(\sigma(U),B_{\sigma(U)},E)$ 是相应于 U 的谱测度空间，对于 $f\in\mathscr{B}(\sigma(U),B_{\sigma(U)})$，令

$$f(U)=\int_{\sigma(U)}f(\lambda)\mathrm{d}E(\lambda),$$

则$f\mapsto f(U)$是算子演算.

5. **定理 7**(普朗舍雷尔(Plancherel)定理) $\forall f\in L^2(-\infty,\infty)$,$\exists$ $L^2(-\infty,\infty)$中函数

$$(Uf)(x)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixy}f(y)dy,$$

且$U:f\mapsto Uf$是$L^2(-\infty,\infty)$中的酉算子,其逆算子

$$(U^{-1}f)(x)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ixy}f(y)dy.$$

定义 3 设$f\in L^2(-\infty,\infty)$,函数

$$\tilde{f}(\alpha)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\alpha x}f(x)dx$$

称为f的**L^2-傅里叶变换**,也称$f\mapsto\tilde{f}$为L^2-傅里叶变换.

函数$\bar{f}(\alpha)=(\text{强})\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-i\alpha x}f(x)dx$称为$f$的**$L^2$-傅里叶逆变换**,也称$f\mapsto\bar{f}$为$L^2$-傅里叶逆变换. 公式$(\tilde{f},\tilde{g})=(f,g)$称为**巴塞瓦公式**.

6. **定义 4** 设H是复可分希尔伯特空间,$\{e_n|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是$H$中完备的就范直交系. 又设$U$是$H$中有界线性算子,具有性质

$$Ue_n=e_{n+1},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

则称U是**双向平移算子**.

设$\{\xi_n|n=0,1,2,\cdots\}$是H中完备就范直交系,又设V是H中有界线性算子,具有性质

$$V\xi_n=\xi_{n+1},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

则称V是**单向平移算子**.

定义 5 设H和G是赋范线性空间,A是H中的线性算子,U是H到G上的酉算子,则称算子UAU^{-1}和A是**酉等价的**.

定理 8 H^2中单向平移算子没有非平凡的约化子空间.

疑难解析

1. 怎样理解酉算子？

答 设U是内积空间H到内积空间G中的线性算子，且U又是保范的，即$\forall x\in H$，$\|Ux\|=\|x\|$成立，则称U是**保范算子**. 若U是H到G上(即$R(U)=G$)的算子，则称U是酉算子.

若U是保范的，则U是可逆的，因而酉算子是内积空间H到内积空间G上的保范的、一对一的线性算子. 同时，酉算子的逆算子U^{-1}也是酉算子.

一般只讨论希尔伯特空间上的酉算子.

2. 酉算子与自共轭算子、正规算子有什么关系？

答 设H是希尔伯特空间，$T:H\to H$是有界线性算子，T^*是T的共轭算子，若$T^*=T$，则T是自共轭算子(或埃尔米特算子)；若T是双射，且$T^*=T^{-1}$，则T是酉算子；若$TT^*=T^*T$，则称T是正规算子.

若T为自共轭算子或酉算子，则T必为正规算子.

$$T=T^*\Rightarrow T^*T=TT^*=T^2,$$

$$T^*=T^{-1}\Rightarrow T^*T=TT^*=I.$$

但是，正规算子不一定是自共轭算子或酉算子. 例如，若$I:H\to H$是恒等算子，则$T=2\mathrm{i}I$为正规算子，因为

$$T^*=-2\mathrm{i}I,\quad TT^*=T^*T=4I,$$

但

$$T^*\neq T,\quad T^*\neq T^{-1}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}I,$$

所以T不是自共轭算子，也不是酉算子.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉酉算子的概念，理解酉算子的谱分解定理，知道酉算子的一些简单应用.

例1 设H为希尔伯特空间，$U\in B(H)$，证明：

(1)U 是酉算子的充要条件是U 是单射，且$U^*=U^{-1}$；

(2)U 是酉算子的充要条件是U 是保范的，且为满射.

证 (1)必要性 若U 是酉算子，则

$$(x,U^*Uy)=(Ux,Uy)=(x,y),\quad x,y\in H,$$

故$U^*U=I$，且$\|Ux\|^2=\|x\|^2$，所以U 是单射. 因而$U^{-1}: H\to H$ 存在，且

$$U^*=U^*UU^{-1}=IU^{-1}=U^{-1}.$$

充分性 若$U^*=U^{-1}$，则

$$(Ux,Uy)=(x,U^*Uy)=(x,y),$$

所以U 是酉算子.

(2)必要性 题(1)中已证.

充分性 若U 是保范的，且为满射，则

$$\|Ux\|^2=\|x\|^2,\quad \forall\, x\in H.$$

当H 是实内积空间时，由极化恒等式得

$$\begin{aligned}(Ux,Uy)&=\frac{1}{4}(\|U(x+y)\|^2-\|U(x-y)\|^2)\\&=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)=(x,y),\ \forall\, x,y\in H.\end{aligned}$$

当H 是复内积空间时，有

$$\begin{aligned}(Ux,Uy)&=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k\|U(x+\mathrm{i}^k y)\|^2\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k\|x+\mathrm{i}^k y\|^2=(x,y),\quad \forall\, x,y\in H,\end{aligned}$$

所以，U 是酉算子.

例2 设U,V 是希尔伯特空间H 上的两个酉算子，证明：

(1)U 是保范(等距)的，即$\forall\, x\in H$，$\|Ux\|=\|x\|$；

(2)$H\neq\{\theta\}$时，$\|U\|=1$；

(3)$U^{-1}(=U^*)$是酉算子；

(4)UV 是酉算子；

(5)复希尔伯特空间H 上有界线性算子T 为酉算子的充要条

件是T为等距且满射的.

证 (1)因为

$$U^*=U^{-1}\Rightarrow \|Ux\|^2=(Ux,Ux)$$
$$=(x,U^*Ux)=(x,x)=\|x\|^2,$$

所以

$$\|Ux\|=\|x\|.$$

(2) $\|Ux\|=\|U\|\ \|x\|=\|x\|\Rightarrow\|U\|=1.$

(3)因为U是双射,故U^{-1}也是双射,由共轭算子性质,有

$$(U^{-1})^*=U^{**}=U=(U^{-1})^{-1},$$

所以U^{-1}是酉算子.

(4)因为UV是双射,由共轭算子性质与单积的逆的性质,有

$$(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}.$$

所以UV是酉算子.

(5)在例1题(2)中已证,现对其充分性作出另一种证明. 由T的等距性,有

$$(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=(x,x)=(Ix,x),$$

因此

$$((T^*T-I)x,x)=0.$$

由零算子性质知

$$T^*T-I=0\Rightarrow T^*T=I,$$
$$TT^*=TT^*(TT^{-1})=T(T^*T)T^{-1}=TIT^{-1}=I.$$

综合即得$T^*T=TT^*=I$,故$T^*=T^{-1}$,即知T为酉算子.

例3 证明:若等距线性算子$T:H\to H$不是酉算子,则必将希尔伯特空间H映射到H中一适当的闭子空间.

证 由第二章第一节例3知,$R(T)=Y\subset H$是H的子空间,$\forall\ y\in\overline{Y}$,$\exists\ \{y_n\}\subset Y$,使得$y_n\to y$. 设$y_n=Tx_n$,则因为等距,$\{x_n\}$是柯西序列. 又由$H$的完备性知,存在$x\in H$,使得$x_n\to x$,故

$$\|Tx-y\|=\|(Tx-Tx_n)+(Tx_n-y)\|$$
$$\leqslant\|T\|\ \|x-x_n\|+\|y-y_n\|\to 0,$$

即$y=Tx\in Y$,所以知Y是H的闭子空间.

当$Y=H$时,T为酉算子.

例4 设$T: X\to X$是内积空间X的等距线性算子,若$\dim X<\infty$,证明:T为酉算子.

证 由第二章第一节例3知,$R(T)$是向量空间,且$\dim R(t)\leqslant \dim X$. 由$T$的等距性,$T$将直交基映为$R(T)$中一直交系,因此$\dim R(T)\geqslant \dim X$. 综合两式得$\dim R(T)=\dim X$,且$R(T)=X$,所以$T$是酉算子.

例5 设S与T是希尔伯特空间H上的线性算子,若在H上存在酉算子U,使得

$$S=UTU^{-1}=UTU^{*},$$

则称算子S与T是酉等价的. 若T是自共轭的,证明S也是自共轭的.

证 因为T是自共轭的,故$T=T^{*}$,于是

$$S^{*}=(UTU^{*})^{*}=U^{**}T^{*}U^{*}=UTU^{*}=S,$$

所以S是自共轭的.

例6 设$U: H\to H$是酉算子,证明:

$$\sigma(U)\subset\{\lambda \mid \lambda\in \mathbf{C}\text{ 且 }|\lambda|=1\},$$

即酉算子的谱都位于单位圆周上.

证 因为$\|U\|=1$,所以$\sigma(U)\subset\{\lambda \mid |\lambda|\leqslant 1\}$. 由于$U^{-1}=U^{*}\in B(H)$,故$0\in\rho(U)$,则当

$$|\lambda-0|<\frac{1}{\|R_0(U)\|}=\frac{1}{\|0I-U^{-1}\|}=1$$

时,$\lambda\in\rho(U)$,故$\{\lambda \mid |\lambda|<1\}=\rho(U)$,从而$\sigma(U)\subset\{\lambda \mid |\lambda|=1\}$.

例7 证明:对于任何$L^2(R)\to L^2(R)$的酉算子U,$g(t)=Uf(t)$都对应了一对定义在$(R\times R)$上的函数$K(\xi,t)$与$H(\xi,t)$,使得

(1)对于固定的ξ,$K(\xi,t)$,$H(\xi,t)\in L^2(R)$;

(2)积分

$$\left\{\begin{matrix}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(\xi,t)}K(\eta,t)\mathrm{d}t\\ \int_{-\infty}^{\infty}\overline{H(\xi,t)}H(\eta,t)\mathrm{d}t\end{matrix}\right.=\begin{cases}\min(|\xi|,|\eta|), & \xi\eta\geqslant 0,\\ 0, & \xi\eta<0,\end{cases}$$

$$\int_0^{\eta} K(\xi,t)\mathrm{d}t=\int_0^{\xi}\overline{H(\eta,t)}\mathrm{d}t;$$

(3) $$\int_0^{\xi} g(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H(\xi,t)}g(t)\mathrm{d}t.$$

反之，每一对满足题(1)、(2)的$K(\xi,t)$和$H(\xi,t)$都由题(3)定义了$L^2(R)\to L^2(R)$的互逆的酉算子.

证 先证在$L^2(R)$上酉算子对应满足条件的函数$K(\xi,t)$与$H(\xi,t)$.

设U是一个酉算子，记

$$e_\xi(t)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\xi, & t\text{ 在 }0\text{ 与 }\xi\text{ 之间},\\ 0, & t\text{ 不在 }0\text{ 与 }\xi\text{ 之间},\end{cases}$$

显然$e_\xi(t)\in L^2(R)$. 令

$$H(\xi,t)=Ue_\xi(t),\quad K(\xi,t)=U^{-1}e_\xi(t),$$

则：(1)由于U是$L^2(R)$到自身的算子，所以对于固定的ξ，有$H(\xi,t),K(\xi,t)\in L^2(R)$.

(2) $$\int_a^b\overline{K(\eta,t)}K(\xi,t)\mathrm{d}t$$

$$=(U^{-1}e_\eta,U^{-1}e_\xi)=(U^*e_\eta,U^*e_\xi)$$

$$=(e_\eta,e_\xi)=\begin{cases}\min(|\xi|,|\eta|), & \xi\eta\geqslant 0,\\ 0, & \xi\eta<0.\end{cases}$$

类似可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H(\xi,t)}H(\eta,t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\min(|\xi|,|\eta|), & \xi\eta\geqslant 0,\\ 0, & \xi\eta<0,\end{cases}$$

且 $$\int_0^{\eta} K(\xi,t)\mathrm{d}t=(U^{-1}e_\xi,e_\eta)=(e_\xi,Ue_\eta)=\int_0^{\xi}\overline{H(\eta,t)}\mathrm{d}t.$$

(3)对于$g=Uf$，有

$$(g,e_\xi)=\int_0^{\xi} g(t)\mathrm{d}t=(Uf,e_\xi)=(f,U^{-1}e_\xi)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

$$(f,e_\xi)=\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=(U^{-1}g,e_\xi)=(U^*g,e_\xi)=(g,Ue_\xi)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H(\xi,t)}g(t)\mathrm{d}t$$

再证给出满足题(1)、(2)的函数$H(\xi,t)$，$K(\xi,t)$，由题(3)定义$L^2(R)$上一对互逆酉算子.

定义$Ue_\xi(t)=H(\xi,t)$，$Ve_\xi(t)=K(\xi,t)$，则题(2)表示

$$(Ve_\eta,Ve_\xi)=(e_\eta,e_\xi),\quad (Ue_\eta,Ue_\xi)=(e_\eta,e_\xi),$$
$$(Ve_\xi,e_\eta)=(e_\xi,Ue_\eta).$$

对区间的特征函数定义了U,V，就可以对阶梯函数$f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_{\xi_k}\in L^2(R)$定义

$$Uf(t)=\sum_{k=1}^{m}a_kUe_{\xi_k}(t),\quad Vf(t)=\sum_{k=1}^{m}a_kVe_{\xi_k}(t).$$

由于线性性，当f,g都是阶梯函数时，有

$$(Vf,Vg)=(f,g),\quad (Uf,Ug)=(f,g),\quad (Vf,g)=(f,Ug).$$

这说明在由阶梯函数组成的$L^2(R)$的线性子空间上，U,V是等距的，且互为对方的共轭算子. 利用阶梯函数在$L^2(R)$中稠密，可以连续地将U,V延拓到$L^2(R)$上. 再由模和内积的连续性知，延拓后的U,V也是等距的，且互为对方的共轭算子. 同时$V^*V=I$，$U^*U=I,U=V^*$，即U有左逆U^*和右逆V，所以U^{-1}存在，且$U^{-1}=U^*=V$，故U为酉算子. 类似地，$V^{-1}=U=V^*$，故V也是酉算子，与U互逆.

由第一部分证明可知，U,V可由题(3)表示.

例8(沃特松(Watson)变换) 设

(1)$\dfrac{k(t)}{t}\in L^2(R)$，

(2)$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{k(\xi t)}k(\eta t)}{t^2}\mathrm{d}t=\begin{cases}\min(|\xi|,|\eta|), & \xi\eta\geqslant 0,\\ 0, & \xi\eta<0,\end{cases}$

证明：

$$g(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(\xi t)}{\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$
$$f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{k(\xi t)}}{\xi}g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

定义了$L^2(R)$到自身的一对互逆酉算子.

证　取　$K(\xi,t)=\dfrac{\overline{k(\xi t)}}{t}$，　$H(\xi,t)=\dfrac{k(\xi t)}{t}$，

则当ξ固定时，K和H都属于$L^2(a,b)$，而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H(\xi,t)}H(\eta,t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(\xi,t)}K(\eta,t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}a\frac{k(\xi t)k(\eta t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}\min(|\xi|,|\eta|), & \xi\eta\geqslant 0,\\ 0, & \xi\eta<0,\end{cases}$$

且
$$\int_0^{\eta}K(\xi,t)\mathrm{d}t=\int_0^{\eta}\frac{\overline{k(\xi t)}}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\xi\eta}\frac{\overline{k(u)}}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\xi}\overline{H(\eta,t)}\mathrm{d}t.$$

于是，由例7（波瑞内尔(Bochner)定理）知，$K(\xi,t)$与$H(\xi,t)$生成一对互逆的酉算子$Uf=g$，$f=U^{-1}g$，满足

$$\int_0^{\xi}g(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(\xi,t)}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H(\xi,t)}g(t)\mathrm{d}t.$$

因此，几乎处处有

$$g(\xi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(\xi t)}{t}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$f(\xi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{k(\xi t)}}{t}g(t)\mathrm{d}t.$$

将k取成某个具体的函数，便可得出古典的傅里叶变换.

第八节　自共轭算子的谱分解

主 要 内 容

1. 定理1　设H和G是希尔伯特空间，T是$D(T)(\subset H)$到G中的线性算子，则使G中某个向量y满足

$$(Tx,y)=(x,y^*),\quad x\in D(T)$$

的H中向量y^*最多只有一个的充要条件是$D(T)$在H中稠密.

2. **定义1** 若算子的定义域在全空间中稠密,则称为**稠定的**算子.

定义2 设H和G是希尔伯特空间,T是H到G的稠定的算子,其定义域为$D(T)$,记

$$D(T^*)=\{y \mid y\in G,\exists\ y^*\in H\text{ 使}(Tx,y)=(x,y^*)\text{ 对一切 }x\in D(T)\text{ 成立}\},$$

并在$D(T^*)$上作算子$T^*: y\mapsto y^*(y\in D(T))$,则称$T^*$为$T$的**共轭算子**(或**伴随算子**).

3. **定理2** 共轭算子有下列性质:

(1)稠定线性算子T的共轭算子T^*是线性算子;

(2)设T_1,T_2是H到G的稠定线性算子,且$D(T_1)\cap D(T_2)$也是H中稠密集,则$(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*$;

(3)设T_1,T_2是H到G的稠定线性算子,且$T_1\subset T_2$,则$T_1^*\supset T_2^*$.

推论 若T_1,T_2中有一个是全空间有定义的有界线性算子,则$(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$.

4. **定理3** 设T是H到G的稠定线性算子,则T^*是闭算子.

5. **定义3** H中的稠定线性算子T,若有$T\subset T^*$,则称T是**对称的**(或**埃尔米特的**);若有$T=T^*$,则称T是**自共轭的**(或**自伴的**).

定理4 在希尔伯特全空间H上定义的自共轭算子必是有界算子.

定理5 H中稠定线性算子T是对称算子的充要条件是对于任何$x,y\in D(T)$,都有$(Tx,y)=(x,Ty)$.

定理6 设A,B是希尔伯特空间H中的自共轭算子,若$A\subset B$,则$A=B$.

定理7 设H和G是希尔伯特空间,A是H中自共轭算子,$U(D(U)=H)$是H到G上的酉算子,则UAU^{-1}是G中的自共轭算

子.

定义4 设H和G是内积空间，A是由H的子空间$D(A)$到H的算子，U是H到G上的酉算子，则称算子UAU^{-1}和A是酉等价的.

6. **定理8** 设H是希尔伯特空间，A是H中自共轭算子，则算子$A\pm iI$的逆算子$(A\pm iI)^{-1}$存在，且$(A+iI)^{-1}$是全空间定义的线性有界算子.

定义5 设A是希尔伯特空间H中的自共轭算子，则称算子$U=(A-iI)(A\pm iI)^{-1}$是A的凯莱变换.

定理9 希尔伯特空间H中自共轭算子A的凯莱变换U是H上的酉算子，1不是U的特征值，且

$$A=i(I+U)(I-U)^{-1}.$$

推论 当A是有界自共轭算子时，I是U的正则点.

定理10 设A是希尔伯特空间H中的自共轭算子，U是A的凯莱变换，则在映射$L: z\mapsto w=\frac{z-i}{z+i}$之下，$\sigma(A)$映成$\sigma(U)-\{1\}$.

推论 H中自共轭算子的谱点在实轴上.

7. **定理11** 设$\{A_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$是希尔伯特空间H的全空间上定义的有界自共轭算子，且A_n的值域彼此直交，记

$$D=\left\{x \mid x\in H, \sum_{n=1}^{\infty}\|A_n x\|^2<\infty\right\},$$

又作以D为定义域的算子A，且

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}A_n x,\ x\in D,$$

则$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n x \text{ 按强极限收敛}\right)A$是自共轭算子.

定理12 设$\{T_\lambda \mid \lambda\in(-\infty,\infty)\}$是希尔伯特空间$H$上的谱系，$f(\lambda)$是贝尔(Baire)函数. 记

$$D=\left\{x \mid x\in H,\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)^2 \mathrm{d}\,\| T_\lambda x\|^2<\infty\right\},$$

则必有 D 上定义的算子 A，使得 $\forall\ x,y\in D$，有

$$(Ax,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y),$$

且当 $x\in D$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n-1\leqslant|f(\lambda)|<n} f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda x$ 强收敛于 Ax，当 f 是实值函数时，A 是自共轭的.

定义 6 在定理 12 的条件下，称定义在

$$D=\left\{x \mid x\in H,\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\,\| T_\lambda x\|^2<\infty\right\}$$

上的算子 $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{|f(\lambda)|\leqslant n} f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda x$ 关于 $\{T_\lambda\}$ 的广义(强)谱积分，记做 $A=\int f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$.

推论 设 $\{T_\lambda \mid \lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 是希尔伯特空间 H 中的谱系，则以

$$D(A)=\left\{x \mid x\in H,\int \lambda^2 \mathrm{d}\,\| T_\lambda x\|^2<\infty\right\}$$

为定义域的算子 $A=\int\lambda\mathrm{d}T_\lambda$ 是自共轭算子.

8. 定理 13(自共轭算子谱分解定理) 设 H 是复希尔伯特空间，A 是以 $D(A)$ 为定义域的自共轭算子，则必有 H 中谱系 $\{T_\lambda \mid \lambda\in(-\infty,\infty)\}$，使得

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}T_\lambda.$$

称由自共轭算子 A 决定的谱系 $\{T_\lambda\}$ 所产生的谱测度 (R^1,B_1,T) 为由 A 决定的谱测度.

定理 14 设 A 是 H 中的自共轭算子，则 A 所决定的谱测度 (R^1,B_1,T) 集中在 $\sigma(A)$ 上，即 $T(\sigma(A))=I$，且 T 不能集中在比 $\sigma(A)$ 更小的闭集上.

推论1 设A是H中有界的自共轭算子，则

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\sup_{\|x\|=1}(Ax,x),\quad \inf_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\inf_{\|x\|=1}(Ax,x).$$

推论2 设A是复希尔伯特空间中任一有界自共轭算子，$(\sigma(A),B_{\sigma(A)},T)$是$A$所决定的谱测度空间，设$B$是任一与$A$可交换的有界线性算子，则对于任何$M\in B_{\sigma(A)}$，$B$与$T(M)$可交换.

疑难解析

共轭算子定义的合理性依赖于什么？

答 共轭算子定义的合理性依赖于T稠定. 因为，若存在$x\in D(T^*)$，$T^*x=z_1$，且$T^*x=z_2$，则

$$(y,z_1)=(y,z_2),\ \forall\ y\in D(T),$$

所以
$$(y,z_1-z_2)=0\quad(\forall\ y\in D(T)),$$

即$z_1-z_2\perp D(T)$，而$D(T)$稠密，从而$z_1=z_2$.

设H，G是希尔伯特空间，T是H到G的稠定线性算子，任取$y\in H$，有$\varphi_y:x\mapsto(Tx,y)$是以$D(T)$为定义域的线性泛函. 若φ_y是连续的，则由黎斯定理，有$y^*\in H$，使得$\varphi_y(x)=(x,y^*)$. $D(T)$在H中稠密就保证了y^*的惟一性. 当T是全空间定义的有界线性算子时，对任何y，φ_y是连续的，因而y有相应的y^*，而映射$y\mapsto y^*$就是第四节定义的T的共轭算子T^*. 对于一般的稠定线性算子，不一定对每个y，φ_y都是连续的. 我们只挑选那些使φ_y连续，即使得y^*存在的y，作为共轭算子T^*定义域中的向量. 共轭算子就是用这种方法定义的.

方法、技巧与典型例题分析

例1 在$H=L^2(\mathbf{R})$上定义乘法算子

$$D(T)=\left\{f\in L^2(\mathbf{R})\,\middle|\,\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

$$(Tf)(x)=xf(x),\forall\ f\in D(T),$$

证明：T稠定且无界.

证　因为$C_0^\infty \subset D(T)$，且C_0^∞在H稠，所以T稠定. 令

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{n}, & x\in[n,n+1/n],\\ 0, & x\overline{\in}[n,n+1/n],\end{cases}$$

则
$$\|f_n\|^2=\int_n^{n+1/n} n\mathrm{d}x=1,$$

而
$$\|Tf_n\|^2=\int_n^{n+1/n} nx^2\mathrm{d}x\geqslant n^2,$$

从而知T无界.

例 2　在$H=L^2[0,1]$上定义

$$D(T)=\{f\in L^2[0,1]\,|\,f'\text{在}[0,1]\text{上绝对连续，且}f''\in L^2[0,1]\},$$
$$Tf=-f'',\ f\in D(T),$$

证明：T为稠定无界算子.

证　因为$C_0^\infty(0,1)\subset D(T)$，所以$T$稠密. 令$f_n=\sqrt{2n+1}x^2$，则

$$\|f_n\|^2=(2n+1)\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=1,\ f_n\in D(T).$$

但
$$Tf_n=-\sqrt{(2n+1)n(n-1)}x^{n-1},\ n\geqslant 2,$$
$$\|Tf_n\|^2=(2n+1)^2n^2(n-1)^2\frac{1}{2n-3}\to\infty,\ n\to\infty,$$

故T为稠定无界算子.

例 3　证明：T为闭算子的充要条件是$\forall\ \{x_n\}\subset D(T)$，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，且$\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=y$，有$x\in D(T)$，且$Tx=y$.

证　必要性　设有$\{x_n\}\subset D(T)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\quad \lim_{n\to\infty}Tx_n=y,$$
$$\{(x_n,Tx_n)\}\subset G(T)=\{(x,Tx)\,|\,x\in D(T)\},$$

则
$$\|(x_n,Tx_n)-(x_m,Tx_m)\|$$
$$=\sqrt{\|x_n-x_m\|^2+\|Tx_n-Tx_m\|^2}\to 0,\ n,m\to\infty.$$

从而$\{(x_n,Tx_n)\}$为$G(T)$中的柯西序列. 而$G(T)$是闭的，所以$(x,y)\in G(T)$，即$x\in D(T)$，$y=Tx$.

充分性 若条件满足，设$(x,y)\in\overline{G(T)}$，证$(x,y)\in G(T)$. 由于$(x,y)\in\overline{G(T)}$，故必有$(x_n,Tx_n)\in G(T)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,Tx_n)=(x,y)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=x,\lim_{n\to\infty}y_n=y.$$

由题设知$x\in D(T)$，$y=Tx$，从而$(x,y)=(x,Tx)\in G(T)$，故$G(T)$是闭子空间.

例4 证明：在定义域上连续的算子不一定是闭算子.

证 设$D(T)$为希尔伯特空间H的稠真子空间，$T=I|_{D(T)}$，则T是稠定的，T在$D(T)$上连续但不闭. 事实上，设$x_0\in H\backslash D(T)$，则$x_0\overline{\in}D(T)$，且存在$\{x_n\}\subset D(T)$，使得$x_n\to x_0$，此时

$$\lim_{n\to\infty}Tx_n=\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,$$

但Tx_0没有定义，故T不是闭算子.

设T和T_1都是H上的稠定线性算子，且$G(T)\subset G(T_1)$，则称T_1是T的**延拓**. 若稠定线性算子T有一个闭延拓，则称T为**可闭算子**，可闭算子T的最小闭延拓称为T的**闭包**，记为$\overline{T}$.

例5 若T可闭，证明：$G(\overline{T})=\overline{G(T)}$.

证 设T为H上线性算子，则$H\times H$的子空间$G(T)=\{(x,Tx)\,|\,x\in D(T)\}$称为$T$的图.

若S为T的任意闭延拓，则$G(T)\subset G(S)$，故$\overline{G(T)}\subset G(S)$，从而$\overline{T}$作为$T$的最小闭延拓，有$G(\overline{T})\subset\overline{G(T)}$.

反之，$\forall\ (0,y)\in\overline{G(T)}$，有$(0,y)\in G(\overline{T})$，从而$\overline{T}0=y$，即$y=0$. 定义算子$R$

$$D(R)=\{x\in H\,|\,\text{存在}\ y,\text{使得}(x,y)\in\overline{G(T)}\},$$

$$Rx=y,\quad x\in D(R),$$

故R的定义是合理的. 因为，若

$$(x,y),(x,y')\in\overline{G(T)},$$

使得
$$\overline{T}x=y,\quad \overline{T}x=y',$$

则
$$(x,y)-(x,y')=(0,y-y')\in\overline{G(T)},$$

于是$y=y'=0$，即$y=y'$.

由于$G(R)=\overline{G(T)}$，所以R为T的闭延拓，又$\overline{T}$为最小闭延拓，故$G(\overline{T})\subset G(R)$，从而$R=\overline{T}$，且$G(\overline{T})=\overline{G(T)}$.

例 6 设$H=L^2(R)$，定义

$$T: D(T)=C_0^\infty(R),\ Tf=\mathrm{i}f',\ f\in D(T),$$

$$T_1: D(T_1)=C_0^1(R),\ T_1f=\mathrm{i}f',\ f\in D(T),$$

则$T\subset T_1$. 证明：$\overline{G(T)}\supset G(T_1)$（于是，若$T$可闭，则$\overline{T}\supset T_1$）.

证 设$f\in D(T)$，令$f_\varepsilon(x)=(f*\rho_\varepsilon)(x)$，其中$\rho_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}\rho\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$，则$f_\varepsilon\in C_0^\infty(R)$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}f_\varepsilon=f$.

$$\begin{aligned}Tf_\varepsilon(x)&=\mathrm{i}f_\varepsilon'(x)=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\rho_\varepsilon(x-t)\mathrm{d}t\\&=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\rho_\varepsilon(x-t)\mathrm{d}t\\&=-\mathrm{i}f(t)\rho_\varepsilon(x-t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\rho_\varepsilon(x-t)\mathrm{d}t\\&=\mathrm{i}f'*\rho_\varepsilon(x)\to\mathrm{i}f'\quad(\varepsilon\to 0^+),\end{aligned}$$

即
$$Tf_\varepsilon\to\mathrm{i}f'\quad(\varepsilon\to 0^+).$$
所以
$$\{f,\mathrm{i}f'\}\in G(T_1),$$
而
$$\{(f_\varepsilon,\mathrm{i}f_\varepsilon)\}\subset G(T),$$
故$(f,\mathrm{i}f')\in\overline{G(T)}$，从而$G(T_1)\subset\overline{G(T)}$.

例 7 证明：稠定算子的共轭算子不一定是稠定算子.

证 设$H=L^2(R)$，φ为有界可测函数，且$\varphi\overline{\in}L^2(R)$，令

$$D(T)=\left\{f\in L^2(R)\,\Big|\,\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

$$Tf=(f,\varphi)\varphi_0,\ f\in D(T),$$

其中φ_0为$L^2(R)$中某个非零元素，且

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x.$$

因为$C_0^\infty(R)\subset D(T)$，所以$T$稠定. $\forall\, u\in D(T^*)$，由定义有$T^*u\in L^2(R)$，且

$$(f,T^*u)=(Tf,u),\ \forall\, f\in D(T).$$

而 $(Tf,u)=((f,\varphi)\varphi_0,u)=(f,\varphi)(\varphi_0,u)$

$$=(\varphi_0,u)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\bar{\varphi}(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{(\varphi_0,u)\varphi(x)}\mathrm{d}x$$

$$=(f,\overline{(\varphi_0,u)}\varphi),\ \forall f\in D(T),$$

所以 $T^*u=\overline{(\varphi_0,u)}\varphi$. 由于 $\varphi\bar{\in}L^2(R)$，要使 $T^*u\in L^2(R)$，必须 $\overline{(\varphi_0,u)}=0$，即 $u\perp\varphi_0$，从而 $\overline{D(T^*)}\neq L^2(R)$.

例8 设 T 为稠定闭算子，B 也稠定，且

(1) $D(B)\supset D(T)$，

(2) $\|Bx\|\leqslant a\|x\|+b\|x\|,\forall x\in D(T)(a\geqslant 0,0\leqslant b<1)$，

证明：$T+B$ 是闭算子.

证 设 $\{x_n\}\subset D(T+B)=D(T)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(T+B)x_n=x$. 因为

$$\|(T+B)\bar{x}\|\geqslant\|T\bar{x}\|-\|B\bar{x}\|$$

$$\geqslant\|T\bar{x}\|-a\|\bar{x}\|-b\|\bar{x}\|,\ \forall\bar{x}\in D(T),$$

所以 $\{Tx_n\}$ 为柯西序列，而 T 为闭算子. 于是，$x\in D(T)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=Tx$. 而

$$\|Bx_n-Bx\|=\|B(x_n-x)\|$$

$$\leqslant a\|x_n-x\|+b\|Tx_n-Tx\|,$$

因此，$Bx_n\to Bx,n\to\infty$. 从而，$z=Tx+Bx=(T+B)x$，即 $T+B$ 为闭算子.

第九节 正常算子的谱分解

主 要 内 容

1. 定义1 设 M 是复希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，若 N 与其共轭算子 N^* 可交换，即 $NN^*=N^*N$，则称算子 N 是正常算子（正规算子）.

定理 1 设N是复希尔伯特空间H的有界线性算子，则N是正常算子的充要条件是N的实部与虚部可交换.

定义 2 设(X_j,R_j,E_j) $(j=1,2)$是希尔伯特空间H中的两个谱测度空间，若对一切$M_j\in R_j,j=1,2,E_1(M_1)$与$E_2(M_2)$可交换，则称这两个谱测度是可交换的.

定理 2 复希尔伯特空间中正常算子的实部与虚部分别决定的两个谱测度是可交换的.

2. **定义 3** 设(X_j,R_j,E_j) $(j=1,2)$是谱测度空间，设E是$(X_1\times X_2,R_1\times R_2)$上的谱测度，满足条件：当$M_j\in R_j$时，有

$$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2), \quad ①$$

则称E为E_1与E_2的**乘积测度**，可记为$E_1\times E_2$，并且$(X_1\times X_2,R_1\times R_2,E)$为$(X_1,R_1,E_1)$与$(X_2,R_2,E_2)$的**乘积测度空间**.

定理 3 设(X_j,R_j,E_j) $(j=1,2)$是复希尔伯特空间H中的两个谱测度空间，则$(X_1\times X_2,R_1\times R_2)$上存在$E_1$与$E_2$的乘积测度$E_1\times E_2$的充要条件是$E_1$与$E_2$可交换.

推论 1 设(X_j,R_j,E_j)是复希尔伯特空间H中两个可交换的谱测度，则在$(X_1\times X_2,R_1\times R_2)$上$E_1$与$E_2$的乘积谱测度是惟一的. 设$A$是$H$中任一有界线性算子，若$A$与$E_j$ $(j=1,2)$可交换（即$E_j(M)A=AE_j(M)$），则A与它们的乘积谱测度可交换.

推论 2 设(X_j,R_j,E_j) $(j=1,2)$是复希尔伯特空间H中的两个谱测度空间，而E_j $(j=1,2)$是可交换谱测度，E是$(X_1\times X_2,R_1\times R_2)$上$E_1$与$E_2$的乘积谱测度. $B(X_j,R_j)$是X_j上关于R_j可测的有界函数全体，则当$f_j\in B(X_j,R_j)$时，有

$$\int_{X_1\times X_2} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}E(x_1,x_2)$$
$$=\int_{X_1} f_1(x_1)\mathrm{d}E(x_1)\int_{X_2} f_2(x_2)\mathrm{d}E(x_2).$$

3. **定理 4**（正常算子的谱分解定理） 设N是复希尔伯特空间H的正常算子，则必有$(\sigma(N),B_{\sigma(N)})$上的谱测度$E$使得$N=$

$\int_{\sigma(N)} z\mathrm{d}E(z)$，且对$H$中任何有界线性算子$A$，当$A$与$N$和$N^*$都可交换时，$A$必与$E(M)(M\in B_{\sigma(N)})$可交换.

推论1 设N是复希尔伯特空间H中的正常算子，则N决定的谱测度不可能集中在比$\sigma(N)$更小的闭集上.

推论2 设N是复希尔伯特空间H中的正常算子，$(\sigma(N), B_{\sigma(N)}E)$是由$N$决定的谱测度，$\forall\ f\in B(\sigma(N), B_{\sigma(N)})$，作

$$f(N)=\int_{\sigma(N)} f(z)\mathrm{d}E(z),$$

则$f\mapsto f(N)$是算子演算.

推论3 设H是复希尔伯特空间，A是$D(A)\to H$的自共轭算子，F是A所决定的谱测度. 令$B_{\sigma(A)}$为$\sigma(A)$上的有界贝尔(Baire)函数全体，对每个$f\in B_{\sigma(A)}$，作线性有界算子

$$f(A)=\int_{\sigma(A)} f(\lambda)\mathrm{d}F(\lambda)$$

则映射$f\mapsto f(A)$有如下的性质：

(1)埃尔米特性 $\overline{f}(A)=(f(A))^*$. 特别地，当f是实函数时，$f(A)$是自共轭的；

(2)线性性 设α,β是数，$f,g\in B_{\sigma(A)}$，有

$$(\alpha f+\beta g)(A)=\alpha f(A)+\beta g(A);$$

(3)可乘性 设$f,g\in B_{\sigma(A)}$，有$(fg)(A)=f(A)\cdot g(A)$.

疑 难 解 析

怎样构造乘积谱测度?

答 若E_1与E_2是可交换的，要构造它们的乘积谱测度E可分四步来做：

(1)令P表示复希尔伯特空间中投影算子全体，$P=\{M_1\times M_2 \mid M_j\in R_j, j=1,2\}$，利用$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2)$作出$P\to P$的映射$E$.

(2)作集类$\widehat{R_1\times R_2}=\{\bigcup_{j=1}^{n} M_j \mid n$为有限数，且$M_j\in P, M_1, M_2,$

$\cdots, M_n$ 两两不相交}.

将E从P延拓到$R_1\times R_2$上. 且$E(\cdot)$在$\widehat{R_1\times R_2}$上有有限可加性.

(3)证E是代数$\widehat{R_1\times R_2}$上的谱测度，只需证E有可列可加性.

(4)由第六节主要内容中的定理7，$(X_1\times X_2,\widehat{R_1\times R_2})$上的谱测度$E$惟一地延拓成$(X_1\times X_2,\widehat{R_1\times R_2})$上的谱测度.

方法、技巧与典型例题分析

例1 若S和T均为正规线性算子，满足$ST^*=T^*S$和$TS^*=S^*T$，证明：和$S+T$与积ST也是正规算子.

证 由题设条件得

$$(S+T)(S+T)^*=SS^*+ST^*+TS^*+TT^*,$$
$$(S+T)^*(S+T)=S^*S+S^*T+T^*S+T^*T,$$

故由定义可知，$S+T$是正规算子. 又

$$(ST)(ST)^*=STT^*S^*=ST^*TS^*=T^*SS^*T$$
$$=T^*S^*ST=(ST)^*(ST),$$

所以ST也是正规算子.

例2 设T是希尔伯特空间的有界线性算子，证明：T是正规算子.

证 由第四节例18知

$$T=T_1+\mathrm{i}T_2,\quad T^*=T_1-\mathrm{i}T_2,$$

其中
$$T_1=\frac{1}{2}(T+T^*),\quad T_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(T-T^*)$$

是自共轭算子，则

$$TT^*=(T_1+\mathrm{i}T_2)(T_1-\mathrm{i}T_2)=T_1^2+T_2^2+\mathrm{i}(T_2T_1-T_1T_2),$$
$$T^*T=(T_1-\mathrm{i}T_2)(T_1+\mathrm{i}T_2)=T_1^2+T_2^2-\mathrm{i}(T_2T_1-T_1T_2),$$

所以T是正规算子.

例3 设Z是复平面上一有界闭集，B_z是Z中的波雷尔集全体，μ是(Z,B_z)上的测度，作$L^2(Z,B_z,\mu)$上的乘法算子如下：当

$f\in L^2(Z,B_z,\mu)$时

$$(Nf)(z)=zf(z),\quad z\in Z$$

证明：N 是正规算子.

证 显然，N 是有界线性算子，易证 N^* 也是乘法算子

$$(N^*f)(z)=\bar{z}f(z),\quad f\in L^2(Z,B_z,\mu),$$

故当 $f\in L^2(Z,B_z,\mu)$时，有

$$(NN^*f)(z)=|z|^2f(z)=(N^*Nf)(z),$$

所以 N 是正规算子.

例4 设 A 是 H 中有界的自共轭算子，证明：

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\sup_{\|x\|=1}(Ax,x),$$

$$\inf_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\inf_{\|x\|=1}(Ax,x).$$

证 记 $M=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda$. 由于 $A=\int_{\sigma(A)}\lambda\mathrm{d}F_\lambda$，所以当 $\|x\|=1$ 时，有

$$(Ax,x)=\int_{\sigma(A)}\lambda\mathrm{d}(F_\lambda x,x)\leqslant M\int_{\sigma(A)}\mathrm{d}(F_\lambda x,x)=M\|x\|^2=M,$$

因此
$$\sup_{\|x\|=1}(Ax,x)\leqslant M.$$

另一方面，由于$\sigma(A)$是闭集，所以$M\in\sigma(A)$，对于任何正数ε，必然有 $F((M-\varepsilon,M])\neq 0$，否则 F 将集中在

$$\sigma_1=\sigma(A)\cap(-\infty,M-\varepsilon]$$

上，与上面证明结论相矛盾. 任取

$$\|x\|=1,x\in F((M-\varepsilon,M])H,$$

则
$$(Ax,x)=\int\lambda\mathrm{d}(F_\lambda x,x)=\int_{(M-\varepsilon,M)}\lambda\mathrm{d}(F_\lambda x,x)\geqslant M-\varepsilon.$$

因此，又得到 $\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)\geqslant M-\varepsilon$，由 ε 的任意性可知

$$\sup_{\|x\|=1}(Ax,x)\geqslant M.$$

综上两式即得

$$\sup_{\|x\|=1}(Ax,x)=M=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda.$$

同理可证 $\inf\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝泛函分析内容、方法与技巧
作者＝孙清华 侯谦民 孙昊
页数＝２９９
ＳＳ号＝１１５４００２０
出版日期＝２００５年０６月第１版

前言

目录